

Willkommen zum Workshop 2003 “Unternehmensbewertung“ in Hannover

Das Thema DCF-Verfahren ist unvermindert aktuell. Die beiden Treffen 1998 und 2002 in Berlin und Hannover haben gezeigt, dass noch viel Diskussionsbedarf hinsichtlich der Verfahren des Discounted Cashflow besteht und in diesem Sinne haben wir im Jahre 2003 ein weiteres Treffen in Hannover organisiert, um in einen regen Gedankenaustausch zu treten. Dabei standen eher akademisch orientierte Themen im Vordergrund, die sowohl die Grundlagen der Unternehmensbewertung wie auch empirische Fragestellungen betrafen.

Wieder möchten wir uns bei der *Fakultät Wirtschaftswissenschaften der Universität Hannover* für die Bereitstellung der Räumlichkeiten bedanken. Der *Verein zur Förderung der Zusammenarbeit von Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V.* hat ein weiteres Mal mit einer äußerst großzügigen Spende den Workshop finanziell unterstützt. Diese finanzielle Hilfe umfasste wieder Reisekosten- und Übernachtungsstipendien für Doktoranden, denen so eine Teilnahme ermöglicht wurde. Und, last but not least, haben Frauke Daidone, Dorotheé Bott und Alexander Kruck dafür gesorgt, dass den Teilnehmer der Aufenthalt so angenehm wie möglich gestaltet wurde.

Ich wünsche allen Teilnehmer einen spannenden Workshop sowie einen angenehmen Aufenthalt in Hannover.

Hannover, im Juni 2003,

Andreas Löffler

Teilnehmerverzeichnis

Name	Vorname	Universität	e-mail Adresse
Ballwieser, Prof.	Wolfgang	München	ballwieser@bwl.uni-muenchen.de
Blecher	Christian	Bielefeld	cblecher@wiwi.uni-bielefeld.de
Braun	Inga	Frankfurt	ibraun@wiwi.uni-frankfurt.de
Carlsen	Christina	Hamburg	Carlsen@econ.uni-hamburg.de
Casey, Dr.	Christopher	Wien	christopher.casey@wu.edu
Essler	Wolfgang	München	Wolfgang.essler@orcf.de
Guntermann	Dirk	Hannover	Dirk.guntermann@stud.uni-hannover.de
Häußler	Matthias	Karlsruhe	Matthias.haeussler@wiwi.uni-karlsruhe.de
Hofmann, Prof.	Christian	Hannover	hofmann@controlling.uni-hannover.de
Hundsdoerfer, Prof.	Jochen	Bochum	Jochen.Hundsdoerfer@ruhr-uni-bochum.de
Kluge	Markus	Hannover	markuskluge@web.de
Kruck	Alexander	Hannover	akruck@gmx.net
Kruschwitz, Prof.	Lutz	Berlin	ls-kruschwitz@wiwiss.fu-berlin.de
Laitenberger, Dr.	Jörg	Hannover	jl@wacc.de
Lodowicks	Arnd	Berlin	lodowick@zedat.fu-berlin.de
Löffler, Prof.	Andreas	Hannover	al@wacc.de
Pfeiffer, Prof.	Thomas	Wien	Thomas.Pfeiffer@UniVie.ac.at
Plückhahn	Thomas	Hamburg	plueckhahn@mba.uni-hamburg.de
Pochop	Susann	HU Berlin	pochop@wiwi.hu-berlin.de
Rogall	Thorsten	Hannover	thorsten.rogall@web.de
Schneider	Michael	Hannover	michaelsch2@web.de
Scholze	Andreas	Bielefeld	ascholze@wiwi.uni-bielefeld.de
Schulte	Inka	Hannover	is@wacc.de
Schwetzler, Prof.	Bernhard	Leipzig	schwetzl@finance.hhl.de
Siegel, Prof.	Thoeodor	Berlin	Siegel@wiwi-hu-berlin.de
Streitferdt	Felix	München	felix.streitferdt@allianz.com
Tang	Yanqiong	Hannover	yt@wacc.de
Teichmann	Dennis	Hannover	Dennisteichmann@aol.com
Wiese	Jörg	München	Wiese@bwl.uni-muenchen.de
Wiesel	Thorsten	Frankfurt	thorsten.wiesel@gmx.de
Wilhelm, Prof.	Jochen	Passau	Jochen.wilhelm@uni-passau.de

Zeitplan des Workshops

9.15-10.00 Thomas Pfeiffer (Wien): Net Present Value Consistent Investment Criteria Based on Accruals

10.00-10.45 Lutz Kruschwitz (Berlin): Auf dem Weg zu einer Theorie der Unternehmensbewertung

11.00-11.45 Christopher Casey (Wien): Cash Flow-Dekompositions- und Bewertungsprinzipien

11.45-12.30 Andreas Löffler (Bernover): Das Standardmodell unter Unsicherheit

13.30-14.15 Jörg Laitenberger (Hannover): Wie reagieren im CAPM Kapitalkosten auf steigende Steuersätze?

14.15-15.00 Jörg Wiese (München): Bedingungen für Irrelevanz persönlicher Steuern im CAPM mit deutschem Steuersystem

15.00-15.45 Jochen Wilhelm (Passau): Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien

16.00-16.45 Bernhard Schwetzler (Leipzig): Corporate Cash Holdings and Conglomerate Discount: Is there a Distortion in Germany?

Die Vorträge

Thomas Pfeiffer untersucht Bedingungen eines Kapitalwertkonzepts, das nicht auf Zahlungs- sondern Rechnungswesengrößen beruht (Lücke-Theorem). Dabei zeigt er auf, welche Bedingungen für alle denkbaren Abschreibungsregime notwendig sind und beweist, dass nur das Residualeinkommen-Konzept ein konsistentes Ergebnis liefert. Einziger Freiheitsgrad stellt die Höhe der zu aktivierenden Investitionsausgabe dar.

Lutz Kruschwitz umreißt die Grundrisse einer Monografie „DCF“ (gemeinsam mit Andreas Löffler). Er beschreibt, dass alle bisherigen Darstellungen verschiedener Discounted Cashflow-Verfahren durch ein ad hoc-Vorgehen und unsystematische Behandlung verschiedener Finanzierungskonzepte (beispielsweise der Arbitragefreiheit) gekennzeichnet sind.

Christopher Casey will mit seinem Beitrag die verschiedenen DCF-Varianten voneinander abgrenzen und andere, bisher in der Literatur noch nicht behandelte Bewertungskonzeptionen entwickeln. Er nutzt zur Klassifikation ein Rechenschema zur Ermittlung des Eigenkapitalmarktwertes und unterscheidet zwischen Verbund- und Einzelbewertung des Cashflows.

Andreas Löffler diskutiert das Standardmodell unter Unsicherheit. Er zeigt auf, dass dieses Standardmodell bei Verwendung linear gekürzter Vor-Steuer-Kapitalkosten auf Arbitragegelegenheiten führen kann. Er entwickelt ein neues Standardmodell, welches diese Arbitragegelegenheiten nicht aufweist.

Jörg Laitenberger diskutiert die Frage, welchen Einfluss eine Einkommensteuer auf die Werte von Finanztiteln haben kann. Er nutzt eine Variante des mehrperiodigen CAPM, um einen ersten Versuch einer Charakteristik zu geben.

Jörg Wiese widmet sich der Fragestellung, welche Auswirkungen im einperiodigen CAPM eine Einkommensteuer nach deutschem Steuerrecht haben kann. Dazu verwendet er den Maximierungskalkül unter Einbeziehung der Steuerbelastung der Investoren und leitet eine neue Kapitalmarktlinie her.

Jochen Wilhelm gibt in seinem Vortrag eine Definition eines Sicherheitsäquivalentes im mehrperiodigen Kalkül. Er stellt dieses Sicherheitsäquivalent in Relation zum äquivalenten Martingalmaß mit sowie ohne spanning-Eigenschaften des Bewertungsobjektes. Insbesondere zeigt er, dass man über das Vorzeichen der Risikoprämie keine a-priori-Aussagen machen kann. Des weiteren schlägt Wilhelm ein Konzept der „Separierbarkeit einer Risikoprämie von der Zeit“ vor und diskutiert dessen Eigenschaften.

Bernhard Schwetzler behandelt eine empirische Fragestellung: Konglomerate (Unternehmen, die in mehreren Business-lines aktiv sind) haben signifikant niedrigere Unternehmenswerte als ein Portfolio aus Einzelunternehmen, das jeweils Einzelgeschäfte tätigt. Schwetzler untersucht diese Fragestellung für den deutschen Markt und zeigt auf, wie hoch der Wertunterschied ist.

Net Present Value Consistent Investment Criteria Based on Accruals

A Generalisation of the Residual Income Identity

Thomas Pfeiffer*†

Revised Version

January 2003

*Chair for Accounting and Control, Vienna University, Brünner Straße 72, A-1210 Vienna.
thomas.pfeiffer@univie.ac.at. To appear in: Journal of Business Finance and Accounting.

†I thank an anonymous referee and an associate editor for helpful comments. Additionally, I thank Kenneth Peasnell for helpful comments on a previous version of the paper.

Net Present Value Consistent Investment Criteria Based on Accruals: A Generalisation of the Residual Income-Identity

Abstract. In recent years, many firms have favoured residual income for value based management. One main argument for this measure is its identity with the net present value rule and that this compatibility with the net present value rule holds true for all possible depreciation schedules selected. In this article, we analyse whether there are other, undiscussed, accrual accounting numbers that enable net present value consistent investment decisions for all possible depreciation schedules. Our analysis provides an if-and-only-if characterisation of the entire class of net present value consistent investment criteria, based on accounting information. This provides new insights into the residual income concept, hurdle rates, opening and closing error conditions achieved by applying more common performance measure structures, and allocation rules. Moreover, our analysis shows the limits of constructing such investment criteria.

Keywords: Accrual accounting numbers, investment criteria, residual incomes, hurdle rates, allocation rules

1 Introduction

1.1 Definition of the Analysed Problem

For decades, much discussion in the area of management control has focused on the extent to which accrual accounting numbers support optimal investment decision-making. Typically, this branch of literature considers accounting measures that are designed such that an investment centre manager who makes his investment decision by means of discounting accrual accounting numbers will make the optimal investment decision for central management. Thereby, the measures are judged against the criterion of whether they are compatible with the *net present value rule (npv-rule)* (see, for example, Solomons, 1965, p.277; Egginton, 1995, p. 201; Bromwich and Walker, 1998, p. 394; Grinyer, 2000, p. 4; and Stark, 2000, p. 314).

Business research has long recognised that residual income measures are compatible with

the net present value rule. Thereby, residual income is defined as the profit minus an interest charge on the book value of the investment. Preinreich (1938), Hicks (1946), Edwards and Bell (1961), Kay (1976) and Peasnell (1981, 1982) have shown that the following *residual income identity (ri-identity)*

$$\sum_{t=1}^T p_t c_t(I) - I = \sum_{t=1}^T p_t (c_t(I) - d_t I - r b_{t-1} I),$$

is true, where $p_t := (1+r)^{-t}$ are exogenously given discount factors; r the costs of capital in period t , I the investment at time t , $c_t(\cdot)$ the cash flows of the projects at time t , $d_t I$ the depreciation at period t and $b_{t-1} I$ the book value of the project of the period $t-1$ ($t = 1, \dots, T$). To derive this identity, the following assumptions are made (see, for example, Peasnell, 1981, p. 53, 1982, p. 362, particularly Theorem 1 and Corollary 1, for the explicit derivation of the ri-identity):¹

- (i) The profit calculation must obey the *accounting identity* ($b_t I := b_{t-1} I - d_t I$): all prior-year adjustments, extraordinary items and asset revaluation surpluses are passed through the profit and loss account. Hence, all current cost accounting holding gains and losses affecting the accounting value must be included in the profit.
- (ii) Any *opening error* in asset valuation equals the *closing error*, which is the case for completed projects where errors are zero ($b_0 I := I$ and $b_T I := 0$).

If both these conditions are met, the investment is allocated such that the present value of the allocations equals the initial investment ($\sum_{t=1}^T p_t (d_t I + r b_{t-1} I) = I$). Such *allocation rules* are called *complete* (see, for example, Rogerson, 1997, p. 779; as well as Bromwich and Walker, 1998, p. 406).

One important issue of the ri-identity is that it holds true for *all* possible depreciation schedules. In other words, the construction of the residual income measure is independent

¹Peasnell (1982, p. 362, Accounting Identity 1) states that accounting profits must equal the net dividends plus the change in net book values during the period. In this definition, accounting profits are of the all-inclusive or clean surplus variety (for the clean surplus concept, see Feltham and Ohlson, 1995). We do not explicitly want to restrict our analysis to the valuation of equity, thus we do not consider the question of dividends any further. Hence, our accounting identity, which is technically the same, has a slightly different interpretation (on this point see Peasnell, 1982, p. 362, Point (i)). It is important to note that both definitions do not explicitly consider prepayments, inventories, etc. (for a more general definition of the depreciation concept, see, for example, Stauffer, 1971; and Gordon and Stark, 1989).

of the depreciation schedule selected, or as Peasnell puts it: ‘*Any* depreciation will do’ (Peasnell, 1981, p. 365, italics in original). Accounting has always been interested in such accruals. The reason is that otherwise the allocation rule must be restated for all possible depreciation schedules, which seems rather expensive (see, for example, Peasnell, 1981, p. 361, for the advantages of multiple depreciation possibilities). Despite the residual income concept, economic research has long recognised the dangers of inputting investment decisions to accounting profit rates, because this might lead to inter-temporal distortions of the investment decision due to the depreciation schedules selected (see, for example, Solomons, 1965; and Peasnell, 1982).

Recently, residual income concepts marketed by *Stern Stewart & Co.* under the label *Economic Value Added* (EVA) and by *McKinsey & Company, Inc.* under the name *Economic Profit* (EP) have undergone a strong resurgence. One main argument for the use of these concepts is their compatibility with the net present value rule. A variety of similar concepts based on cash flows or residual income measures have also been marketed by other consulting companies or have already been implemented by companies (see, for example, Stewart, 1991; Bromwich and Walker, 1998; and O’Hanlon and Peasnell, 1998). Our *research questions* associated with the observation of such value based management concepts are the following:

- (i) Are there other, undiscovered and undiscussed, investment criteria based on available accrual accounting numbers that enable net present value consistent investment decisions, independent of the depreciation schedule selected?
- (ii) Which accounting conditions must the accrual accounting numbers satisfy? In particular, what opening and closing conditions must be fulfilled? Also, must the allocation rule, like for the residual income identity, be complete?

The purpose of this article is to characterise the *entire* class of all such investment criteria.

This paper is organised as follows: Section 2.1 presents the basic model structure and basic definitions. Section 2.2 characterises the class of all net present value consistent investment criteria that are generated by currently available accrual accounting numbers. Section 3 completes the paper with a short discussion of the findings.

1.2 Related Literature

As mentioned, Preinreich (1938) was the first to demonstrate that the present value of residual income is equivalent to the net present value of a project. Interestingly, Preinreich's finding has been re-analysed more carefully by several authors over several decades. As an important consequence, it became clear that one major impact of the ri-identity is that it is true for *any* project, *any* book value and *any* method of depreciation, as long as the book values are calculated according to the accounting identity, the hurdle rates are set equal to the capital cost rates and the initial investment is written off entirely (see Edwards and Bell, 1961; Solomons, 1965; Kay, 1976; and Peasnell, 1982).

One main condition under which the ri-identity is fulfilled, is that the net present value and the present value of the residual incomes are calculated over the *entire life* of a project. Scapens (1978, 1979) demonstrated in a dynamic, neo-classical model that under certain conditions the myopic short-run maximisation of periodic economic profit will lead to the same decision as the maximisation of long-run wealth (for similar conclusions, see Tomkins, 1975; and Emmanuel and Otley, 1976). Recent research based on this idea from Anctil (1996) as well as Anctil, Jordan and Mukherji (1997) has shown with a dynamic model, in which information is decentralised and communication costs increase with the complexity of messages, that if managers maximise periodic residual income, this converges at the limit to maximum long-run wealth. Overall, these analyses have shown that periodic residual income can serve as an approximation of the net present value if *problems of periodic inconsistency* arise.

In the same vein, in the so-called *asset base debate*, academics have been aware that residual income's consistency with the npv-rule holds only when the comparison is made over the entire life of a project. Single periodic residual incomes are typically not consistent with the npv-rule. For example, the straight-line depreciation method can give positive residual income ex-ante in the first years of a project's life despite the project having a negative net present value (see, for example, Egginton, 1995, p. 204, p. 217). To solve such problems, appropriate depreciation schedules were developed to design periodically consistent residual incomes. Two suggested measures are of primary importance: *earned economic income*, proposed by Grinyer (1985) and *maintainable residual income*, suggested by Egginton (1995) (for an overview see Peasnell, 1995; as well as Bromwich and

Walker, 1998, pp. 402). The earned economic incomes are constructed such that they are proportional to the cash flows and the net present value of the project at each period of time. Maintainable residual income selects depreciation so that the residual income in each period is the same (see Egginton, 1995; Bromwich and Walker, 1998, p. 401; and O’Hanlon and Peasnell, 1998, p. 433). Rogerson (1997) and Reichelstein (1997, 2000) were the first to analyse, within a scenario of incomplete information, the *problem of an impatient manager* characterised by the following points:

- (i) Within a company, a divisional manager makes a decentralised investment decision and headquarters provide the capital.
- (ii) Unlike headquarters, the divisional manager knows the cash-flow structure for the investment project at the time of decision (ex-ante). Headquarters can observe cash flows only ex-post, but has some knowledge of cash flow patterns.
- (iii) The impatient manager discounts future payments at a higher calculated interest rate than headquarters. Headquarters does not know the discount factors of the divisional management.

Within this setting, the question analysed is how to set up an incentive scheme to achieve goal-congruent investment decisions between the manager and headquarters when the class of contracts is restricted to disaggregated contracts that do not provide certain forward-looking project information. Rogerson (1997) and Reichelstein (1997, 2000) have shown that residual incomes can, under certain conditions, act as appropriate substitutes. Thereby, the necessary information is integrated into the performance measure by what is known as the *relative benefit depreciation schedule*, which assures the allocation rule is proportional to the relative growth profile of the investment project (see the findings of Rogerson, 1997, Proposition 1 and 4; and Reichelstein, 1997, Proposition 2 and 3; as well as the overview by Bromwich and Walker, 1998, p. 409). The relative benefit depreciation schedule is, interestingly, equivalent to the depreciation schedule selected in earned economic incomes and for the special case of constant payments, it is equivalent to the maintainable residual income (see Bromwich and Walker, 1998, p. 407).

As mentioned before, the main rationale for the use of residual income is its consistency with the npv-rule. The literature on *real options* has pointed out that the rule ‘invest

if-and-only-if the net present value of the project exceeds zero' changes 'to invest if-and-only-if the net present value of the project exceeds the value of the option to wait' (see, for example, Dixit and Pydick, 1994; and Stark, 2000, p. 313). Kay and Mayer (1986), Grinyer and Walker (1990) and Stark (2001) analyse performance measures that support investment decision-making in a real options context. In particular, Stark (2001) shows that a residual income-type measure supports optimal investment and disinvestment decision-making. One problem with this solution, which is true for almost all solutions, is that a circularity problem arises by calculating the cost of capital, which means that information of the entire project is needed *ex-ante* to calculate the costs of capital. Hence, it is possible to make the investment decision *without* calculating the residual income measure (see Stark, 2001, pp. 325).

Theoretically, the *circularity problem of calculating the costs of capital* also arises if several inter-dependent investment projects with binding budget constraints are considered. The optimal costs of capital are calculated according to the rule 'capital cost rates plus opportunity costs' where the opportunity costs are the Lagrangian multipliers associated with the budget constraints. To derive the Lagrangian multipliers, the investment problem has to be solved. Thus, a circularity problem occurs. Such a circularity problem also arises for single projects when interior solutions do not exist, because in these cases the upper- and lower-boundaries also have to be considered using Lagrangian multipliers for the boundaries (see, for example, Tomkins, 1973, Chapter 6 and 7; Amey, 1969b, Chapter 4). In both cases, the technical reason for the circular result is the primal-dual circularity problem of constraint optimisation problems. Even if we consider single projects with an interior solution, then the circularity problem can arise because, in theory, the investment decision must already have been known in order to calculate the appropriate cost of capital (see also, the example of Stark, 1986, pp. 22). These problems, for example, can be overcome under certain capital market conditions, such as a perfect market resulting in a separation of investment decisions and the determination of capital cost rates (see, for example, Magill and Quinzii, 1996, Chapter 3 and 6). However, this is not a practical problem to the extent that firms typically use exogenously determined approximations of the costs of capital (see, for example, Stewart, 1991, Chapter 12; Copeland, Koller and Murrin, 2000, Chapter 10; and Stark, 2000, p. 327).

Additionally, investment criteria based on the *return on investment concepts* have been analysed for investment decision-making. Of particular interest for research has been the *accounting rate of return*; the ratio of the accounting profit of the period and the book value of assets at the beginning of the period. Considerable effort has been invested in research to analyse conditions under which the accounting rate of return reconciles with or deviates from the economist's concept of the *internal rate of return* (see Stauffer, 1971; Salamon, 1973; Kay, 1976; Peasnell, 1982; and Gordon and Stark, 1989). Stauffer (1971) and Gordon and Stark (1989), for example, analysed the sign and magnitude of the difference between the accounting rate of return and the internal rate of return and under which depreciation schedule both are equal. In the same vein, Kay (1976) developed a weighted averaging scheme of return on investments that equals the internal rate of return. Drawbacks of this scheme were that the weights depended on the internal rate of return and that accounting valuation errors could appear (see Kay, 1976 and 1978; Wright, 1978; and Peasnell, 1982, pp. 370). Furthermore, Kay (1976), using a continuous-time framework, and Peasnell (1982), analysing a discrete-time model, showed that the present value of cash flows discounted at the accounting rates of return are exactly equal to the initial investment if there are no opening and closing valuation errors.

Our analysis differs from the literature mentioned above on several points. Like the literature on the ri-identity, we consider an investment decision-making problem over the entire life of a single project. We do not analyse time-inconsistency problems such as the literature on the asset base debate or the problem of the impatient manager. Furthermore, we do not model problems of real options. Finally, we consider capital cost rates as exogenously given. Our setting is consistent with the literature on the ri-identity. This is due to our research question stated above. In particular, our analysis differs from the ri-analyses and RoI-analyses in the following points:

- (i) *Structure of npv-consistent performance measures*: First, we start with a broad class of accrual accounting numbers and analyse which of these performance measures enable npv-consistent investment decisions. We explicitly do *not* assume, like the literature on the ri-identity, that the accrual accounting numbers must be residual income. As a result, we show *endogenously* that the performance measures must have a residual income structure (see Condition (R) of Proposition 1).

- (ii) *Hurdle rates*: Given the result concerning the structure of performance measures, we show *endogenously* how the hurdle rates must be determined for residual incomes (see Condition (H) of Proposition 1). The ri-analyses have shown that if the hurdle rates are set equal to the capital cost rates, then the ri-identity holds true. However, these studies have not analysed whether there are other possibilities for calculating the hurdle rates, for example for the case when another depreciation basis is used.
- (iii) *Closing and opening errors*: According to the ri-analyses, the initial investment is documented in the opening book value and then written off entirely over the project's life to avoid opening and closing errors. Our analysis shows *endogenously*, how to generalise these opening and closing error conditions (see Condition (C) of Proposition 1).

In summary, we generalise the analyses concerning the ri-identity by endogenously determining the structure of all npv-consistent investment criteria, the hurdle rates, the closing and opening error conditions.

2 The Model

2.1 Assumptions and Definitions

In the following, we consider an investment project P for T periods. The project generates cash in- and outflows of

$$P := (-I, c_1(I), \dots, c_T(I)),$$

where $I \geq 0$ ($I \in \mathcal{I}$) is the level of investment and $c_t(I)$ the cash-flow function at time t . The investment project is one of all projects \mathcal{P} available to the decision maker and is selected at random from nature ($P \in \mathcal{P}$). Additionally, an accounting system associated with the investment project is considered. The system tracks the *realised ex-post cash flows* [I and $c_t(I)$] at time t . In addition to pure cash flows, the system also determines accrual accounting numbers as *depreciation* [$d_t I$] and *book values* [$b_t I$] at time t ($t = 1, \dots, T$)

$$b_0 I := \gamma I, \quad b_t I := b_{t-1} I - d_t I = \left(\gamma - \sum_{i=1}^t d_i \right) I \quad (d := (d_1, \dots, d_T) \in \mathcal{D} \subseteq R_{++}^T).$$

To explicitly analyse opening and closing conditions, we assume that the initial book value b_0I equals γ -times multiplied by the initial investment I whereby γ is the degree to which the initial investment is recorded ($\gamma > 0$). Consequently, values other than the initial investment can be used as a depreciation basis, such as the reacquisition values often used in management cost accounting. If the chosen investment level of the project is depreciated completely over T periods ($b_T I = 0$, respectively $\sum_{t=1}^T d_t = \gamma$), the closing error will be 0. In the following, we only assume that there is real depreciation $d_t > 0$ for at least one point in time ($\mathcal{D} \subseteq R_{++}^T$) and that the book values are calculated according to the accounting identity ($b_t I := b_{t-1} I - d_t I$).

In the following, we want to analyse the class of all accrual accounting numbers $\Pi(\cdot)$ based on currently available accounting data at time t : realised accounting profits $[0$, respectively, $c_t(I) - d_t I]$ and book values $[b_{t-1} I]$

$$\begin{aligned} & \Pi(c(I) - dI, bI|d) \\ := & (\Pi_1(c_1(I) - d_1 I, b_0 I|d), \dots, \Pi_T(c_T(I) - d_T I, b_{T-1} I|d)) \end{aligned}$$

($c(I) := (c_1(I), \dots, c_T(I))$ and $b := (b_0, \dots, b_{T-1})$). We assume, that all functions $\Pi_t(\cdot)$ are continuously differentiable in all arguments ($t = 0, \dots, T$). Our class of accruals includes typically used performance measures such as accounting profits, residual incomes and return on investment measures, for example, residual incomes per investment. Table 1 shows how these measures can be constructed.

PLEASE INSERT TABLE 1 HERE.

Typically, investment projects are evaluated according to the npv-rule. Hence, the decision maker sets the level of investment to maximise the net present value $NPV(I)$ of the project as follows

$$\max \left\{ NPV(I) := \sum_{t=1}^T p_t c_t(I) - I \mid I \in \mathcal{I} \right\}.$$

The net present value rule is - as the name says - an investment criteria generated by pure cash flows $[\Pi_0(\cdot) := -I$ and $\Pi_t(\cdot) := c_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, T]$. In the following, we want

to expand this criteria by defining investment criteria based on a system of accruals. For example, the present value of residual income measures is, according to our definition, an investment criteria generated by residual income measures. Furthermore, we want to characterise the class of all investment criteria based on accrual accounting numbers that lead to the same investment decisions as the npv-rule for *all* investment projects and *all* depreciation schedules considered.

Definition 1 *In the following, we make the subsequent two definitions:*

- (i) *We say an investment criterion $\Psi(\cdot)$ is generated by the system of accruals $\Pi(\cdot) := (\Pi_0(\cdot), \dots, \Pi_T(\cdot))$ if-and-only-if the investment project $P \in \mathcal{P}$ is evaluated according to the present value of the accruals*

$$\Psi(I|d) := \sum_{t=1}^T p_t \Pi_t(c_t(I) - d_t I, b_{t-1} I | d).$$

- (ii) *An investment criterion $\Psi(\cdot)$ generated by the system of accruals $\Pi(\cdot)$ enables npv-consistent investment decisions for all investment projects P independent of the depreciation schedule d selected if-and-only-if*

$$\arg \max \{NPV(I) \mid I \in \mathcal{I}\} = \arg \max \{\Psi(I|d) \mid I \in \mathcal{I}\} \quad \forall d \in \mathcal{D}, \forall P \in \mathcal{P} \quad (A)$$

is satisfied.

Condition (A) says that the investment criterion must lead to the same investment decision as the npv-rule for *all* investment projects considered. Condition (A) does not require that the criterion is equivalent to the net present value of the project. For example, every strictly monotone increasing function of the npv-rule also enables npv-consistent investment decisions. Additionally, Condition (A) ensures that the criterion leads to the same investment decisions for *all* depreciation schedules selected.

2.2 Constructing NPV-Consistent Investment Criteria

In this section, we analyse general investment projects $(-b, c_1(I), \dots, c_T(I))$ where there are *no assumptions of regularity* for cash-flow functions - for example, strictly monotone-increasing and concave functions. The following proposition provides an if-and-only-if

characterisation of the class of all investment criteria generated by the system of available accruals that enable npv-consistent investment decisions. (The proof of Proposition 1 is given in the Mathematical Appendix).

Proposition 1 *The class of all investment criteria generated by available accounting measures satisfying (A) is up to a linear transformation $\alpha\Psi^{RI}(\cdot) + \beta$ given by residual incomes ($\alpha \in \mathfrak{R}_{++}$ and $\beta \in \mathfrak{R}$)*

$$\Psi^{RI}(I|d) := \sum_{t=1}^T p_t (c_t(I) - d_t I - r_{ht} b_{t-1} I), \quad (R)$$

whereby the hurdle rates must be set equal to

$$r_{h1} = \frac{1+r-\gamma}{\gamma} \quad \text{and} \quad r_{ht} = r \quad (t = 2, \dots, T) \quad (H)$$

and the following closing and opening error condition

$$b_0 I = \gamma I \quad \text{and} \quad b_T I = 0 \quad (\text{or equivalent } \sum_{t=1}^T d_t I = \gamma I) \quad (C)$$

must be satisfied.

Proposition 1 shows how investment criteria based on accrual accounting numbers can be constructed such that they enable npv-consistent investment decisions for all depreciation schedules. First of all, we want to discuss the (technical) structure of Proposition 1. Proposition 1 shows that the following three conditions must be fulfilled to obtain such npv-consistent investment criteria:

- (i) *(R)esidual income structure of the accrual accounting numbers:* The structure of the performance measures must be residual incomes. Although we have considered a much richer class of accrual accounting numbers, for example, including return on investment numbers, Proposition 1 shows that there are no performance measures other than residual incomes that enable npv-consistent investment decisions for all depreciation schedules.
- (ii) *(H)urdle rates:* The hurdle rates must be calculated according to (H). If, like in the ri-identity literature, opening booking value equals exactly the initial investment, then according to Condition (H) the hurdle rates must equal the capital cost rates.

Thus, Proposition 1 shows that this condition is also necessary, not only sufficient. Furthermore, Condition (H) is a generalisation of how to calculate the hurdle rates when another depreciation basis is used.

- (iii) *(C)losing and opening error condition:* Condition (C) states that there should be no closing error, requiring that the projects must be written off entirely. But Condition (C) does not require that a depreciation basis other than the initial investment be used.

Because Proposition 1 provides an if-and-only-if characterisation of the class of investment criteria generated by currently available accounting measures, it is not possible to construct other performance measures not characterised in Proposition 1 that fulfil Condition (A). Or to put it the other way round, if one of these three conditions is not satisfied, then it is impossible to construct such npv-consistent investment criteria. Although Condition (A) does not require that the criterion be equivalent to the net present value of the project, it is important to note that the net present value and the present value of residual incomes are identical (see therefore Part I of the proof). The identity

$$NPV(I) = \Psi^{RI}(I|d) \quad \forall d \in \mathcal{D}, \forall P \in \mathcal{P}$$

holds true for *any* project, *any* book value and *any* depreciation, as long as the book values are calculated according to the accounting identity, the hurdle rates are constructed according to Condition (H) and the Closing and Opening Error Condition (C) is satisfied. Thus, we need not explicitly consider regularity conditions for the investment problem, because if there is no solution to the investment problem based on the npv-rule, then there is no solution based on residual incomes (and vice versa).

Secondly, we want to discuss the impact of Proposition 1 on accounting profits and residual incomes. Proposition 1 shows that the only possibility to correct accounting profits such that they are npv-consistent for all depreciation schedules, is to use residual income measures. Although the analysed class of investment criteria generated by accrual accounting numbers have been enriched by more common non-linear valuation functions, there is *no* non-linear generalisation of accounting profit that enables (A). This result highlights the problems and limitations of profit as an investment criterion. Furthermore, if residual

income measures are then considered up to a linear transformation only, the present value of residual income measures enables npv-consistent investment decisions, if-and-only-if the initial investment is written off entirely and the hurdle rates are set equal to the capital cost rates. Hence, Proposition 1 expands the analysis of Peasnell (1981, 1982) by showing that both these conditions are not only sufficient but also necessary conditions and by showing how to adopt the hurdle rates if other depreciation bases are used (see, in particular, Peasnell, 1981, p. 53, 1982, p. 362, Theorem 1). Furthermore, the result shows that if these two conditions are not satisfied, it is impossible to construct npv-consistent residual income measures, for example, other hurdle rates and another closing error condition.

Thirdly, we want to discuss the impact of Proposition 1 on the allocation rules used and the closing error condition. Typically in accounting, complete allocation rules are used. In the same vein, Proposition 1 shows that the investment must be allocated over time such that the present value of the allocations is exactly the same as the initial investment and not the opening book value, if a depreciation basis other than the initial investment is used

$$\sum_{t=1}^T p_t (d_t I + r_{ht} b_{t-1} I) = I \neq \gamma I = b_0 \quad (\text{for } \gamma \neq 1).$$

Proposition 1 shows that it is not possible to construct, via non-linear performance measure functions, any other npv-consistent investment criteria based on a non-complete allocation rule. Thus, our result provides a kind of rationale for the concept of complete allocation rules.

Finally, Proposition 1 can be interpreted as an *impossibility result*, because it is an if-and-only-if characterisation of the entire class of all npv-consistent investment criteria based on currently available accrual accounting numbers. As mentioned before, Proposition 1 shows the only possibility to generalise the hurdle rates and closing and opening error conditions (see Condition (C) and (H) of Proposition 1). Furthermore, Proposition 1 rules out other performance measures that do not have the structure of residual income (see Condition (R) of Proposition 1).

3 Conclusions

Much recent discussion has focused on the question of which investment criteria, such as the economic value added method based on residual income, enable net present value consistent investment decisions. Studies by Preinreich (1938), Hicks (1946), Edwards and Bell (1961), Kay (1976) and Peasnell (1981, 1982) have shown the identity of the net present value rule and the present value of residual incomes for *any* project, *any* book value and *any* method of depreciation. This result has become the basis for modern value based management. Our research started with the question of how this identity can be generalised. For the first time, we derived an if-and-only-if characterisation of all investment criteria generated by non-linear functionals of accounting profits and book values which enables net present value consistent investment decisions that are independent of the depreciation schedule selected.

Proposition 1 has shown that the identity between net present value and the present value of the residual incomes, developed from accounting literature, *cannot* be further expanded up to a linear transformation by more *common* valuation functions. Hence, our analysis provides a rationale for the widespread practice of using residual income measures as a net present value consistent investment criterion. Furthermore, although the analysed class of investment criteria generated by residual income measures has been enriched by strictly increasing valuation functions and generalised allocation rules, there is *no* non-linear generalisation of accounting profit that enables net present value consistent investment decisions independent of the depreciation schedule selected. The only possibility to avoid such problems is to expand accounting profits to residual incomes. Most of today's consulting firms promote the economic value added method, which is already used by many companies. The paper demonstrates that only these criteria enable net present value consistent investment decisions independent of the depreciation schedule selected. This also might explain why other methods based on accrual accounting numbers are not used in practice.

In summary, our analysis provides new insights into the concept of residual income as a net present value consistent investment criterion and the interaction of exceedingly important concepts of accounting: residual income measures, closing and opening error conditions, hurdle rates and allocation rules. Proposition 1 can be interpreted as an impossibility

result, making it possible to provide insights about the limits of how these concepts can be generalised.

4 Mathematical Appendix

Proof *Part I.* First, we show that if the class of all investment criteria satisfy the conditions of Proposition 1, then (A) is fulfilled. Using $d_t = b_{t-1} - b_t$, we get

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T p_t (d_t I + r_{ht-1} b_{t-1} I) &= \sum_{t=1}^T p_t ((b_{t-1} - b_t) I + r_{ht-1} b_{t-1} I) \\ &= \sum_{t=1}^T p_t ((1 + r_{ht-1}) b_{t-1} I - b_t I) = \sum_{t=0}^{T-1} p_{t+1} (1 + r_{ht}) b_t I - \sum_{t=1}^T p_t b_t I. \end{aligned}$$

Applying $r_{h0} = ((1 + r) - \gamma)/\gamma$, $r_{ht} = r$, $b_0 = \gamma I$ and $b_T = 0$ leads to

$$\begin{aligned} & p_1 (1 + r_{h0}) b_0 I + \sum_{t=1}^{T-1} p_{t+1} (1 + r_{ht}) b_t I - \sum_{t=1}^{T-1} p_t b_t I - p_T b_T I \\ &= p_1 \left(1 + \frac{1 + r - \gamma}{\gamma} \right) \gamma I + \sum_{t=1}^{T-1} p_{t+1} (1 + r) b_t I - \sum_{t=1}^{T-1} p_t b_t I - p_T b_T I \\ &= I - p_T b_T I = I. \end{aligned}$$

Finally, we get for positive linear transformations ($\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} & \max\{\alpha \Psi^{RI}(I) + \beta = \alpha \sum_{t=1}^T p_t (c_t(I) - d_t I - r_{ht-1} b_{t-1} I) + \beta | I \in \mathcal{I}\} \\ &= \alpha \max \left\{ \sum_{t=1}^T p_t c_t(I) - I = NPV(I) | I \in \mathcal{I} \right\} + \beta. \end{aligned}$$

Obviously, these calculations are true for *all* investment projects and *all* depreciation schedules considered. This completes Part I of the proof.

Part II. We assume that another npv-consistent investment criterion $\Psi(\cdot)$ exists for all possible investment projects. In particular, this investment criterion $\Psi(\cdot)$ must be npv-consistent for all differentiable investment projects, for which the npv-investment level is given by its first-order condition (Foc1)

$$0 = \frac{\partial NPV(I)}{\partial I} = \sum_{t=1}^T p_t \frac{\partial c_t(I)}{\partial I} - 1.$$

Due to the differentiability of the performance measures $\Pi_t(\cdot)$, the investment criterion $\Psi(\cdot)$ is also differentiable and the first-order condition of the investment criteria must also hold at the npv-investment level (Foc2)

$$0 = \frac{\partial \Psi(\cdot)}{\partial I} = \sum_{t=1}^T p_t \left(\frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial (c_t - d_t I)} \left(\frac{\partial c_t(I)}{\partial I} - \frac{\partial d_t I}{\partial I} \right) + \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} \frac{\partial b_{t-1} I}{\partial I} \right).$$

Multiplying (Foc1) with $1/\alpha > 0$ and applying (Foc2) leads to

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{t=1}^T p_t \left(\frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial (c_t - d_t I)} \left(\frac{\partial c_t(I)}{\partial I} - \frac{\partial d_t I}{\partial I} \right) + \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} \frac{\partial b_{t-1} I}{\partial I} \right) \right) \\ &= \sum_{t=1}^T p_t \frac{\partial c_t(I)}{\partial I} + 1. \end{aligned}$$

Rearranging leads to

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=1}^T p_t \frac{\partial c_t(I)}{\partial I} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial (c_t - d_t I)} - 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sum_{t=1}^T p_t \left(\frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial (c_t - d_t I)} \frac{\partial d_t I}{\partial I} - \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} \frac{\partial b_{t-1} I}{\partial I} \right) \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

This equation must be satisfied for all possible investment levels $I \in \mathcal{I}$, if we consider a class of parametric investment projects ($P(y) \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{Y}$) for which the npv-investment level $I(y) \in \mathcal{I}$ varies with the parameter $y \in \mathcal{Y}$ over the entire interval \mathcal{I} . Hence, the equation is a polynomial of degree one in the variables $(y_0, \dots, y_T) := (-I, \partial c_1(I)/\partial I, \dots, \partial c_T(I)/\partial I)$, which must be identically zero for all (y_0, \dots, y_T) (because, by assumption, the investment criterion rule cannot be conditioned on the class of investments considered). According to the Fundamental Theorem of Algebra, this is true if-and-only-if all coefficients are set equal to zero. This leads to (Co1) and (Co2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial (c_t - d_t I)} &= \alpha \quad (\forall y \in \mathcal{Y}, \forall d \in \mathcal{D}) \\ \sum_{t=1}^T p_t \left(\frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial (c_t - d_t I)} d_t - \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} b_{t-1} \right) &= \alpha \quad (\forall y \in \mathcal{Y}, \forall d \in \mathcal{D}), \end{aligned}$$

which must be satisfied for *all* investment projects and *all* depreciation schedules.

To analyse (Co2), we rewrite it as follows $(\partial \Pi_t(\cdot)/\partial (c_t - d_t I) = \alpha$ and $I = b_0/\gamma$)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{t=1}^T p_t \left(\frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial d_t I} d_t - \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} b_{t-1} \right) \right) + I \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{t=1}^T p_t \left(\alpha d_t - \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} b_{t-1} \right) \right) + \frac{1}{\gamma} b_0 \\
&= \sum_{t=1}^T p_t \left((b_{t-1} - b_t) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} b_{t-1} \right) + \frac{1}{\gamma} b_0 \\
&= \sum_{t=1}^T p_t \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} \right) b_{t-1} - \sum_{t=1}^T p_t b_t + \frac{1}{\gamma} b_0 \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} p_{t+1} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_{t+1}(\cdot)}{\partial b_t I} \right) b_t - \sum_{t=1}^T p_t b_t + \frac{1}{\gamma} b_0 \\
&= \left(p_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_{t+1}(\cdot)}{\partial b_t I} \right) - \frac{1}{\gamma} \right) b_0 + \sum_{t=1}^{T-1} \left(p_{t+1} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_{t+1}(\cdot)}{\partial b_t I} \right) - p_t \right) b_t - p_T b_T.
\end{aligned}$$

This equation can be restated with the following matrix $A \in \mathfrak{R}^{(T+1) \times (T+1)}$

$$\begin{bmatrix}
-p_T & 0 & \dots & \dots & & 0 \\
0 & p_T \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_T(\cdot)}{\partial b_{T-1} I} \right) - p_{T-1} & 0 & & & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\
\vdots & & 0 & p_2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_2(\cdot)}{\partial b_1 I} r_{h1} \right) - p_1 & 0 & \\
0 & \dots & \dots & 0 & & p_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_1(\cdot)}{\partial b_0 I} \right) - \frac{1}{\gamma}
\end{bmatrix}$$

and the vector $b = (b_0, \dots, b_T) \in \mathfrak{R}^{T+1}$ as follows: $Ab = 0$. This equation must be satisfied for all possible depreciation schedules d - respectively for all possible book values b : $Ab = 0$ ($\forall b$). According to the Fundamental Theorem of Algebra, this is true if-and-only-if $A = 0 \in \mathfrak{R}^{(T+1) \times (T+1)}$. Hence, we have $A = 0$ if-and-only-if

$$b_T = 0, \quad \frac{\partial \Pi_1(\cdot)}{\partial b_0 I} = -\alpha \frac{1+r-\gamma}{\gamma} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Pi_t(\cdot)}{\partial b_{t-1} I} = -\alpha r$$

are satisfied ($t = 2, \dots, T$).

In summary, the following equations must be satisfied for all possible book values b and the considered class of investment projects

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_1(c_1(I) - d_1 I, b_0 I)}{\partial c_1(I) - d_1 I} &= \alpha \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Pi_1(c_1(I) - d_1 I, b_0 I)}{\partial b_0 I} &= -\alpha \frac{1+r-\gamma}{\gamma} \\
\frac{\partial \Pi_t(c_t(I) - d_t I, b_{t-1} I)}{\partial c_t(I) - d_t I} &= \alpha \quad \frac{\partial \Pi_t(c_t(I) - d_t I, b_{t-1} I)}{\partial c_t(I) - d_t I} &= -\alpha r
\end{aligned}$$

($t = 2, \dots, T$). Hence, the first derivatives must be constant in all arguments over the considered interval. The only class of all *differentiable* functions where *all* first derivatives are constant *over* an entire interval, is the class of linear functions. Hence, the functions must be linear with the structure

$$\begin{aligned}\Pi_1(c_1(I) - d_1I, b_1I) &= \alpha \left(c_1(I) - d_1I - \frac{1+r-\gamma}{\gamma} b_0 \right) \\ \Pi_t(c_t(I) - d_tI, b_{t-1}I) &= \alpha (c_t(I) - d_tI - r b_{t-1})\end{aligned}$$

($t = 2, \dots, T$). This completes the proof. \square

5 References

- Amey, L.R. (1969a), ‘Divisional Performance Measurement and Interest on Capital’, *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 1, No. 1, Spring, pp. 2-7.
- Amey, L.R. (1969b), *The Efficiency of Business Enterprise*, (London, George Allen and Unwin).
- Anctil, R.M. (1996), ‘Capital Budgeting Using Residual Income Maximization’, *Review of Accounting Studies*, Vol. 1, No. 1, pp. 9-34.
- Anctil, R.M., J.S. Jordan and A. Mukherji (1997), ‘The Asymptotic Optimality of Residual Income Maximization’, *Review of Accounting Studies*, Vol. 2, No. 3, pp. 9-34.
- Bromwich, M. (1973), ‘Measurement of Divisional Performance: A Comment and an Extension’, *Accounting and Business Research*, Vol. 3, No. 2, Spring, pp. 123-132.
- Bromwich, M. and M. Walker (1998), ‘Residual Income Past and Future’, *Management Accounting Research*, Vol. 9, No. 4, pp. 391-419.
- Copeland, T., T. Koller and J. Murrin (2000), *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies* (3rd ed., New York etc., John Wiley).
- Dixit, A. and R.S. Pindyck (1994), *Investment Under Uncertainty* (Princeton University Press).

- Edwards, E.O. and P.W. Bell (1961), *The Theory and Measurement of Business Income* (Berkeley, University of California Press).
- Egginton, D. (1995), 'Divisional Performance Measurement: Residual Income and the Asset Base', *Management Accounting Research*, Vol. 6, No. 3 pp. 201-222.
- Emmanuel, C.R. and D.T. Otley (1976), 'The Usefulness of Residual Income', *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol. 13, No. 4, Winter, pp. 43-51.
- Feltham, G. and J. Ohlson (1995), 'Valuation and Clean Surplus Accounting for Operating and Financial Activities', *Contemporary Accounting Research*, Vol. 11, No. 2, pp. 689-731.
- Flower, J.F. (1971), 'Measurement of Divisional Performance', *Accounting and Business Research*, Vol. 1, No. 3, Summer, pp. 205-214.
- Gordon, L.A. and A.W. Stark (1989) 'Accounting and Economic Rates of Return: A Note on Depreciation and other Accruals', *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol. 16, No. 3, pp. 425-432.
- Gregory, A. (1987), 'Divisional Performance Measurement with Divisions as Lessees of Head Office Assets', *Accounting and Business Research*, Vol. 17, No. 3, Summer, pp. 241-246.
- Grinyer, J.R. (1985), 'Earned Economic Income: A Theory of Matching', *Abacus*, Vol. 21, No. 3, pp. 130-148.
- Grinyer, J.R. (2000), *Residual Income - An Extension* (Working Paper, University of Dundee).
- Grinyer, J.R. and M.Walker (1990), 'Deprival Value Accounting Rates of Return', *Economic Journal*, Vol. 100, No. 3 (September), pp. 918-922.
- Hicks, J.R. (1946), *Value and Capital* (Oxford, Clarendon Press).
- Kay, J.A. (1976), 'Accountants, too, Could be Happy in a Golden Age: The Accountants Rate of Profit and the Internal Rate of Return', *Oxford Economic Papers (New Series)*, Vol. 28, No.3, pp. 447-460.

- Kay, J.A. (1978), 'Accounting Rate of Profit and Internal Rate of Return: A Reply', *Oxford Economic Papers (New Series)*, Vol. 30, No.3, pp. 469-470.
- Kay, J.A. and C.P. Mayer (1986), 'On the Application of Accounting Rates of Return', *Economic Journal*, Vol. 96, No. 1 (March), pp. 199-207.
- Magill, M. and M. Quinzii (1996), '*Theory of Incomplete Markets*' (MIT Press, Vol. I., Cambridge, MA).
- Mephram, M.J. (1978), 'A Reinstatement of the Accounting Rate of Return', *Accounting and Business Research*, Vol. 8, No. 3, Summer, pp. 178-190.
- O'Hanlon, J. and K. Peasnell (1998), 'Wall Street's Contribution to Management Accounting: The Stern Stewart EVA[®] Financial Management System', *Management Accounting Research*, Vol. 9, No. 4, pp. 421-444.
- Peasnell, K.V. (1981), 'On Capital Budgeting and Income Measurement', *Abacus*, Vol. 17, No. 1, pp. 52 - 67.
- Peasnell, K.V. (1982), 'Some Formal Connections Between Economic Values and Yields and Accounting Numbers', *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 9, No. 3, pp. 361-381.
- Peasnell, K.V. (1995), 'Second Thoughts on the Analytical Properties of Earned Economic Income', *British Accounting Review*, Vol. 27, No. 3, pp. 229-239.
- Preinreich, G. (1938), 'Annual Survey of Economic Theory: The Theory of Depreciation', *Econometrica*, Vol. 6, No. 3, pp. 219-241.
- Reichelstein, S. (1997), 'Investment Decisions and Managerial Performance Evaluation', *Review of Accounting Studies*, Vol. 2, No. 2, pp. 157-180.
- Reichelstein, S. (2000), 'Providing Managerial Incentives: Cash Flows versus Accrual Accounting', *Journal of Accounting Research*, Vol. 38, No. 2, pp. 243-270.
- Rogerson, W.P. (1997), 'Intertemporal Cost Allocation and Managerial Investment Incentives: A Theory Explaining the Use of Economic Value Added as a Performance Measure', *Journal of Political Economy*, Vol. 105, No. 4, pp. 770-795.

- Salamon, G.L. (1973), 'Models of the Relationship Between the Accounting and Internal Rate of Return', *Journal of Accounting Research*, Vol. 11, No. 3, Autumn, pp. 296-303.
- Scapens, R.W. (1978), 'A Neoclassical Measure of Profit', *The Accounting Review*, Vol. 53, No. 2 (April), pp. 448-469.
- Scapens, R.W. (1979), 'Profit Measurement in Divisionalised Companies', *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 6, No. 3, Autumn, pp. 281-305.
- Stark, A.W. (1986), 'More on the Discounting of Residual Income', *Abacus*, Vol. 22, No. 1 (March), pp. 20-28.
- Stark, A.W. (2000), 'Real Options (Dis)Investment Decision-Making and Accounting Measures of Performance', *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 27, No. 3&4, pp. 313-331.
- Stauffer, T.R. (1971), 'The Measurement of Corporate Rates of Return: A Generalized Formulation', *Bell Journal of Economics*, Volume 2, No. 2, Autumn 1971, pp. 434-469.
- Scapens, R.W. and J.T. Sale (1981), 'Performance Measurement and Formal Capital Expenditure Controls in Divisionalised Companies', *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 8, No. 3, Autumn, pp. 389-421.
- Solomons, D. (1965), *Divisional Performance: Measurement and Control* (Homewood (Ill.), Irwin).
- Stewart, G.B. (1991), *The Quest for Value* (New York, Harper Business).
- Tomkins, C.R. (1973), *Financial Planning in Divisionalised Companies* (London, Accountancy Age Books).
- Tomkins, C.R. (1975), 'Another Look at Residual Income', *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 2, No. 1, Spring, pp. 39-53.
- Stewart, G. (1991), *The Quest for Value* (Harper Business, New York).
- Wright, F.K. (1978), 'Accounting Rate of Profit and Internal Rate of Return', *Oxford Economic Papers (New Series)*, Vol. 30, No.3, pp. 464-468.

Performance measure	Construction rule
Accounting profits	$\Pi_t(c_t(I) - d_t I, b_{t-1} I d) := c_t(I) - d_t I$
Residual incomes	$\Pi_t(c_t(I) - d_t I, b_{t-1} I d) := c_t(I) - d_t I - r_{ht} b_{t-1} I$
Accounting rates of return	$\Pi_t(c_t(I) - d_t I, b_{t-1} I d) := \frac{c_t(I) - d_t I}{b_{t-1} I}$
Residual incomes on investment	$\Pi_t(c_t(I) - d_t I, b_{t-1} I d) := \frac{c_t(I) - d_t I - r_{ht} b_{t-1} I}{b_{t-1} I}$

Table 1: Typically used performance measures and their construction rules

(Auf dem Wege zu einer) Theorie der Unternehmensbewertung

Lutz Kruschwitz & Andreas Löffler

Universität Bernover

Workshop Unternehmensbewertung

28. Juni 2003

Übersicht

1. Motivation – Leitlinien – Struktur
2. Grundlagen
 - Kapitalkosten
 - Verschiedene Bewertungskonzepte
 - Auto–regressive Cashflows
3. Firmensteuer
 - Bewertungsrelevante Formen der Finanzierung
4. Persönliche Steuer
 - unlevered and levered firms
 - Fundamentalsatz der Preistheorie
 - Bewertungsrelevante Formen der Thesaurierung

Motivation

- Problematische Beobachtungen:
 - Messung von Kapitalstrukturen
 - Ad-hoc-Aktualisierungen
 - Implizite Arbitragegelegenheiten
- Eigener Beitrag soll diese Probleme überwinden.

Leitlinien

Um eine

- allgemeiner verwendbare,
- nicht angreifbare und
- von Dritten überprüfbare

Theorie der Unternehmensbewertung zu entwickeln, folgende Leitlinien:

- Arbitragefreiheit
- Modelle mit präzisen Definitionen und eindeutigen Annahmen
- formale Herleitung modell-konsistenter Bewertungsgleichungen (Beweis von Bewertungsformeln)

Struktur

1. Grundlagen
2. Firmensteuer
3. Persönliche Steuer
4. Besteuerung auf beiden Ebenen

Grundlagen (1)

- Kapitalkosten
- Verschiedene Bewertungskonzepte
 - (Risikolose Diskontierung von Sicherheitsäquivalenten)
 - Diskontierung erwarteter Cashflows mit Kapitalkosten
 - Risikoneutrale Bewertung
- Zwei äquivalente Bewertungsgleichungen
 - Bewertung mit Kapitalkosten

$$\tilde{V}_t = \sum_{s=t+1}^T \frac{E \left[\widetilde{FCF}_s | \mathcal{F}_t \right]}{(1 + k_t) \cdot \dots \cdot (1 + k_{s-1})}$$

- Risikoneutrale Bewertung

$$\tilde{V}_t = \sum_{s=t+1}^T \frac{E_Q \left[\widetilde{FCF}_s | \mathcal{F}_t \right]}{(1 + r_f)^{s-t}}$$

Grundlagen (2)

- Optionspreistheorie Hauptanwendungsgebiet der risikoneutralen Bewertung.
- Übertragung auf Unternehmensbewertung
 - schwierig, wenn Bewerter keine Cashflow-Verteilungen, sondern nur Erwartungswerte kennt,
 - möglich, wenn auto-regressive Cashflows unterstellt werden

$$E \left[\widetilde{FCF}_{t+1}^u | \mathcal{F}_t \right] = (1 + g_t) \widetilde{FCF}_t^u .$$

- Dann gilt

$$\frac{E \left[\widetilde{FCF}_t^u \right]}{(1 + k^{E,u})^t} = \frac{E_Q \left[\widetilde{FCF}_t^u \right]}{(1 + r_f)^t}$$

- Eigenkapitalkosten der unlevered firm eignen sich als Diskontierungssätze.

Firmensteuer

Ergebnisse für

- autonome Finanzierung
- markt-wertorientierte Finanzierung
 - FTE
 - TCF
 - WACC
- buch-wertorientierte Finanzierung
 - Politik der Vollausschüttung
 - Nur Ersatzinvestitionen
 - Cashflow-orientierte Investitionspolitik
- weitere Finanzierungspolitiken
 - Cashflow-orientierte Finanzierung
 - Dividenden-orientierte Finanzierung
 - konstantes Cashflow/Schulden-Verhältnis

Persönliche Steuer

- unlevered and levered firms
- Fundamentalsatz der Preistheorie
- Bewertungsrelevante Formen der Thesaurierung

Persönliche Steuer

– unlevered and levered firms –

- Thesaurierung in t bewirkt Einkommensteuerersparnis.
- Teilausschüttende Unternehmen mehr wert als vollausschüttende.

	Firmensteuer	Personensteuer
unlevered	unverschuldet	vollausschüttend
levered	verschuldet	teilausschüttend

Persönliche Steuer

– Fundamentalsatz der Preistheorie –

- Wenn
 - Kapitalmarkt arbitragefrei und
 - keine Steuern,

dann gilt der Fundamentalsatz

$$\tilde{V}_t = \frac{E_Q \left[\widetilde{FCF}_{t+1} + \tilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t \right]}{1 + r_f}.$$

- Bei Firmensteuer nur Änderung im Argument des Zählers.
- Bei persönlicher Steuer gilt

$$\tilde{V}_t = \frac{E_Q \left[\widetilde{FCF}_{t+1} + \tilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t \right]}{1 + r_f(1 - \tau)}$$

nur, wenn Steuer ohne Einfluss auf Q ist.

Persönliche Steuer

–Bewertungsrelevante Formen der Thesaurierung–

Ergebnisse für

- Cashflow–orientierte Thesaurierung
- Dividenden–orientierte Thesaurierung
- Liquiditäts–orientierte Thesaurierung
- Thesaurierungspolitik mit Beachtung von Ausschüttungssperren

Cash Flow Dekompositions- und Bewertungsprinzipien

Christopher Casey

Version 1, Juni 2003

Inhaltverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Marktwertermittlung nach Miles/Ezzell	4
2.1 Bewertungsformel.....	4
2.2 Tax Shield-Bestimmung.....	4
2.3 Beispiel.....	6
3. Bewertungsprinzipien	9
3.1 Verbundbewertung von Cash Flows.....	9
3.1.1 Bewertungsmethodik.....	9
3.1.2 Bewertungsgleichungen.....	10
3.1.2.1 FTE-Verbund-Bewertungsansatz.....	10
3.1.2.2 TCF-Verbund-Bewertungsansatz.....	14
3.1.2.3 WACC-Verbund-Bewertungsansatz.....	15
3.1.2.4 APV-Verbund-Bewertungsansatz.....	16
3.2 Einzelbewertung von Cash Flows.....	19
3.2.1 Bewertungsmethodik.....	19
3.2.2 Bewertungsgleichungen.....	20
3.2.2.1 APV-Einzel-Bewertungsansatz.....	20
3.2.2.2 FTE-Einzel-Bewertungsansatz.....	21
3.2.2.3 TCF-Einzel-Bewertungsansatz.....	23
3.2.2.4 WACC-Einzel-Bewertungsansatz.....	25
4. Tax Shield-abhängige Dekomposition von Total Cash Flows	26
5. Zusammenfassung	30
Verzeichnis der zitierten Literatur	31
Anhänge*	

*Die Anhänge können bei Interesse per E-Mail angefordert werden.

1. Einleitung

In diesem Beitrag werden folgende zwei Fragen untersucht: Nach welchen Kriterien können die verschiedenen Varianten des Standard-DCF-Modells voneinander abgegrenzt werden? Bestehen vor dem Hintergrund dieser Abgrenzungskriterien noch weitere, bislang nicht diskutierte Bewertungskonzeptionen? Der Beitrag belegt unter Zugrundelegung einer wertorientierten Finanzierungspolitik, dass die zuvor angesprochenen Bewertungsformeln in der Tat existieren. Sie vermögen das (Standard-)DCF-Modell zu vervollständigen und helfen die verschiedenen DCF-Varianten nach klar definierten Cash Flow-Dekompositionsprinzipien zu systematisieren. Alle in diesem Beitrag diskutierten Bewertungskonzeptionen sind durch deterministische bedingte erwartete Renditen charakterisiert.¹

Die verschiedenen DCF-Varianten lassen sich in einer ersten Systematisierung durch das von ihnen verwendete *Rechenschema zur Ermittlung des Eigenkapitalmarktwertes* klassifizieren. Mit der Festlegung dieses Rechenschemas werden jene zu bewertende Teilzahlungsströme spezifiziert, die für die Ermittlung des Eigenkapitalmarktwertes von Bedeutung sind. Das in Tabelle 1 angeführte Entity-Cash-Flow-Schema verdeutlicht die Zusammenhänge.

1	Ergebnis vor Zinsen und Steuern (<i>EBIT</i>)	
2	– Steuern	
3	= Net Operating Profit Less Adjusted Taxes (<i>NOPLAT</i>)	
4	+ Abschreibungen	
5	= Operating Cash Flow (<i>OCF</i>)	
6	– (Brutto-)Investitionen	
7	= Free Cash Flow (<i>FCF</i>)	$FCF = (F\tilde{C}F_1, F\tilde{C}F_2, \dots, F\tilde{C}F_T)$
8	+ Tax Shield	$TS = (TS_1, \tilde{T}S_2, \dots, \tilde{T}S_T)$
9	= Total Cash Flow (<i>TCF</i>)	$TCF = (T\tilde{C}F_1, T\tilde{C}F_2, \dots, T\tilde{C}F_T)$
10	– Zinsen	
11	+/- Aufnahme/Tilgung von Fremdkapital	
12	– Flow to Debt (<i>FTD</i>)	$FTD = (F\tilde{T}D_1, F\tilde{T}D_2, \dots, F\tilde{T}D_T)$
13	= Flow to Equity (<i>FTE</i>)	$FTE = (F\tilde{T}E_1, F\tilde{T}E_2, \dots, F\tilde{T}E_T)$

Tabelle 1: Entity -Cash-Flow-Schema²

Maßstab der Wertermittlung ist der auf die jeweilige Kapitalposition entfallende Cash Flow. Der Marktwert des Gesamtkapitals ergibt sich hiernach als Marktwert künftiger Total Cash Flows, der Marktwert des Eigenkapitals als Marktwert künftiger Flows to Equity und der Marktwert des Fremdkapitals als Marktwert künftiger Flows to Debt.

Die Bewertungsmodalitäten der verschiedenen DCF-Varianten sollen in diesem Beitrag im Wege einer vergleichenden Gegenüberstellung der Bewertungsformeln in Bezug auf den Marktwert des Gesamtkapitals herausgearbeitet werden. Der Marktwert des Gesamtkapitals ist unter den hier getroffenen Annahmen des Standard-DCF-Modells prinzipiell als der mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte Barwert künftiger erwarteter Total Cash Flows bestimmt. Diese Form der DCF-Bewertung wird erwartungsgemäß als Total Cash Flow-(TCF-)Ansatz bezeichnet. Bestehen vor dem Hintergrund des in Tabelle 1 angeführten Cash Flow-Schemas noch weitere Möglichkeiten, den Gesamtkapitalmarktwert zu ermitteln? Der Adjusted-Present-Value-(APV-)Ansatz, Flow-To-Equity-(FTE-)Ansatz und Weighted-Average-Cost-Of-Capital-(WACC-)Ansatz geben bekanntlich eine jeweils andere Antwort auf diese Frage.

Nach dem APV-Ansatz wird der Total Cash Flow-Zahlungsstrom in zwei Teilzahlungsströme additiv zerlegt, namentlich in einen Free Cash Flow- und einen Tax Shield-Zahlungsstrom. Bei wertadditiver Marktbewertungsfunktion gilt der bekannte Zusammenhang: „Wird ein Zahlungsstrom in mehrere Teilströme additiv zerlegt, dann ist der Marktwert des Zahlungsstroms gleich der Summe der Marktwerte der Teilströme.“³ Der Marktwert des Gesamtkapitals ergibt sich dann in dieser Modellvariante als der mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte Barwert künftiger erwarteter Free Cash Flows (Marktwert bei

¹ Das solcherart definierte Konzept der Kapitalkosten wird ausführlich bei Kruschwitz/Löffler (2003), S. 6 ff. diskutiert.

² Vgl. in etwas anderer Darstellung Fischer/Mandl (2000), S. 461, Tabelle 2.

³ Franke/Hax (1999), S. 348.

vollständiger Eigenfinanzierung) zuzüglich des mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelten Barwertes künftiger erwarteter Tax Shields (Marktwert der Steuervorteile).

Nach dem FTE-Ansatz wird der Total Cash Flow-Zahlungsstrom ebenfalls in zwei Teilzahlungsströme additiv zerlegt, namentlich in einen Flow to Equity- und einen Flow to Debt-Zahlungsstrom. Der Marktwert des Gesamtkapitals ergibt sich dann in dieser Modellvariante als der mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte Barwert künftiger erwarteter Flows to Equity (Marktwert des Eigenkapitals) zuzüglich des mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelten Barwertes künftiger erwarteter Flows to Debt (Marktwert des Fremdkapitals).

Nach dem WACC-Ansatz ergibt sich der Marktwert des Gesamtkapitals vollkommen analog zum TCF-Ansatz als Marktwert künftiger Total Cash Flows, der Marktwert künftiger Total Cash Flows wird jedoch in dieser Modellvariante nicht als der mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte Barwert künftiger erwarteter Total Cash Flows, sondern als der mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte Barwert künftiger erwarteter Free Cash Flows bestimmt. Dieser vor dem Hintergrund des in Tabelle 1 dargestellten Cash Flow Schemas eher befremdlich wirkende Zusammenhang zeigt sich erst in der expliziten Ableitung der WACC-Bewertungsformel.

Das von dem APV- und FTE-Ansatz verwendete Rechenschema zur Ermittlung des Gesamtkapitalmarktwertes resultiert im Prinzip aus einer horizontalen Dekomposition des TCF-Zahlungsstroms. Das solcherart definierte Kriterium zur Abgrenzung der verschiedenen DCF-Varianten kommt in der bildlichen Darstellung einem Längsschnitt durch das Cash Flow-Schema gleich.

Nach anfänglichen Bemühungen in der Literatur um eine Harmonisierung von TCF-, WACC-, APV- und FTE-Ansatz,⁴ hat sich mittlerweile die Erkenntnis durchgesetzt, dass die verschiedenen Bewertungsansätze für gegebene Finanzierungsstrategie und gegebene Datenkonstellation bei sachgerechter Anwendung grundsätzlich zu gleichen Ergebnissen führen müssen. Ebenso bekannt ist aber auch, dass die nach den verschiedenen Bewertungsformeln kalkulierten (Bar-)Wertbeiträge der periodischen Cash Flows zum Unternehmensgesamtwert voneinander abweichen. Eine Diskussion dieser Zusammenhänge findet sich bei Steiner/Wallmeier (1999). Die Autoren sollen hier unter Bezugnahme auf die Bewertungsformeln des APV- und WACC-Ansatzes bei unterstellter wertorientierter Finanzierung mit einem ausführlichen Zitat zu Wort kommen:

„Beim WACC-Verfahren [werden] die Steuervorteile in den Barwert der [Free] Cash Flows eingerechnet. Da die Erwartung eines positiven Cash Flows der Periode t bereits den heutigen Unternehmensgesamtwert und den aktuellen Kreditstand erhöht, verursacht dieser Cash Flow schon in den ersten $t-1$ Perioden Steuerersparnisse. Der summierte Barwert des Cash Flows und aller ihm zuzuordnenden Tax Shields entspricht dem Term $E(CF_t)/(1+WACC)^t$. Der APV-Ansatz stellt die Steuervorteile in zweifacher Hinsicht anders dar: Sie werden zum einen separat ausgewiesen und zum anderen nach Perioden geordnet, unabhängig davon, welchem Cash Flow sie rechnerisch zuzuordnen sind. Wenn beispielsweise nur ein einziger Cash Flow zu erwarten ist und dieser in $t=5$ anfällt, entstehen dennoch in den ersten vier Perioden Tax Shields, die nach dem APV-Ansatz einzeln zu berechnen sind.“⁵

Wenn die verschiedenen Bewertungsansätze – APV-, TCF-, WACC- und FTE-Ansatz – für gegebene Finanzierungsstrategie und gegebene Datenkonstellation zu gleichen (End-)Ergebnissen führen, die Wertbeiträge der periodischen Cash Flows zum Unternehmensgesamtwert jedoch differieren, dann kann dies nur bedeuten, dass neben der horizontalen Dekomposition der in die Bewertung involvierten Zahlungsströme noch weitere Abgrenzungskriterien zwischen den verschiedenen DCF-Bewertungsformeln existieren müssen. An dieser Feststellung knüpft der vorliegende Beitrag mit folgender Hypothese an: Wenn noch weitere Abgrenzungskriterien zwischen den verschiedenen DCF-Bewertungsformeln existieren, dann könnte dies bedeuten, dass auch weitere DCF-Varianten existieren, die sowohl im Hinblick auf die Höhe des Unternehmensgesamtwertes als auch im Hinblick auf die Barwertbeiträge künftiger Cash Flows zu diesem Unternehmensgesamtwert gleichwertig sind. Diesen (und weiteren) von der Theorie bislang nicht diskutierten Bewertungsgleichungen ist der vorliegende Beitrag gewidmet. Von maßgeblicher Bedeutung in diesem Zusammenhang ist die Form der Dekomposition der in die Bewertung involvierten Zahlungsströme. Die Art und Weise, wie ein Gesamtzahlungsstrom in Teilzahlungsströme zerlegt wird, bestimmt letztendlich das konkrete Aussehen der Bewertungsfunktion. In diesem Beitrag werden drei Prinzipien der Cash Flow-Dekomposition diskutiert: Die bereits angesprochene horizontale Dekomposition von Cash Flows, die

⁴ Vgl. unter vielen anderen Hachmeister (1995), S. 102 ff.; Richter (1997); Schwetzler/Darijtschuk (1999), sowie die klärenden Anmerkungen von Wallmeier (1999).

⁵ Steiner/Wallmeier (1999), S. 5 f..

sogenannte vertikale Dekomposition von Cash Flows und schließlich die Tax Shield-abhängige Dekomposition von Cash Flows.

Die horizontale Dekomposition des TCF-Zahlungsstromes legt, wie bereits erwähnt, das Rechenschema zur Ermittlung des Gesamtkapitalmarktwertes fest. Aus dieser Dekomposition resultiert ein FCF-Zahlungsstrom, ein TS-Zahlungsstrom, ein FTD-Zahlungsstrom und ein FTE-Zahlungsstrom. Die auf der Grundlage der solcherart charakterisierten Zahlungsströme erfolgende Marktwertbestimmung wird hier als Verbundbewertung von Cash Flows bezeichnet. Diese Verbundbewertung interpretiert die in die Bewertung involvierten Zahlungsströme als ein zusammenhängendes Aggregat von zeitlich aufeinander folgenden Cash Flows und bewertet diese Zahlungsströme dann auch im Verbund.

Im Zuge der vertikalen Dekomposition von Cash Flows werden die in die Bewertung involvierten Zahlungsströme aus riskanten Total Cash Flows, Free Cash Flows, Tax Shields, Flows to Debt und Flows to Equity in zeitlich-vertikaler Richtung aufgespalten. Dieses Dekompositionsprinzip kommt in der bildlichen Darstellung einem Querschnitt durch das Cash Flow-Schema gleich. Die auf der Grundlage einzelner Cash Flows erfolgende Marktwertbestimmung wird hier als Einzelbewertung von Cash Flows bezeichnet.

Das in dieser Arbeit als Tax Shield-abhängige Dekomposition von Cash Flows bezeichnete Dekompositionsprinzip folgt dem Grundsatz, dass im DCF-Modell mit unterstellter wertorientierter Finanzierung die künftigen Tax Shields in letzter Konsequenz von den künftigen Free Cash Flows der Unternehmung bestimmt werden. Jeder einzelne periodenbezogene riskante Free Cash Flow generiert dabei einen eigenen t -periodigen Zahlungsstrom aus riskanten Tax Shields, woraus prinzipiell für jeden Free Cash Flow ein t -periodiger Zahlungsstrom aus riskanten Tax Shields, Total Cash Flows, Flows to Debt und Flows to Equity resultiert. Die Bewertung der solcherart charakterisierten Zahlungsströme kann prinzipiell sowohl auf der Grundlage des Verbundbewertungs- als auch Einzelbewertungsansatzes erfolgen.

Mit diesem Beitrag werden zusammenfassend die folgenden wesentlichen Zielsetzungen verfolgt:

- Der Focus liegt auf den methodischen Aspekten des DCF-Modells. Angestrebt ist eine in sich geschlossene, umfassende und methodisch fundierte Darstellung der verschiedenen Bewertungsformeln, einschließlich der von der Theorie diskutierten und von der Praxis verwendeten Standard-DCF-Bewertungsformeln. Die theoretische Herleitung der Gleichungen erfolgt dabei weitgehend in Anhängen.
- Hiermit einhergehend soll die Vielschichtigkeit des Kapitalkostenkonzepts dargelegt werden. Kapitalkosten beziehungsweise Diskontierungszinssätze sind grundsätzlich nicht losgelöst von ihrer Umgebung zu interpretieren, sondern stets im Kontext jener Zahlungsströme zu würdigen, in denen sie eingebettet sind. Aus der unterschiedlichen Zerlegung eines Gesamtzahlungsstromes in Teilzahlungsströme resultieren höchst unterschiedliche Diskontierungszinssätze für die Teilzahlungsströme. Auf diese Dimension des Kapitalkostenkonzepts hat bereits Fama (1977) aufmerksam gemacht: „[...] the market value of a firm or of an investment project is just the sum of the market values of all of its future net cash flows. [...] the rates for the different periods preceding the realization of a cash flow need not be the same, and the rates relevant for a given period can differ across cash flows.“⁶

Weiterhin soll anhand eines bewusst einfach gehaltenen und durchwegs verwendeten Beispiels der Zusammenhang zwischen den unbedingten und bedingten erwarteten Renditen der in die Bewertung involvierten Zahlungsströme illustriert werden.

Die weiteren Ausführungen zu diesem Beitrag sind wie folgt strukturiert: In Kapitel 2 wird das Miles/Ezzell-Modell rekapituliert. Dieses Bewertungsmodell ist von maßgeblicher Bedeutung für die Ableitung der in Kapitel 3 zur Diskussion gestellten Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen. In Abschnitt 3.1 wird die oben angesprochene Verbundbewertung von Cash Flows, in Abschnitt 3.2 die Einzelbewertung von Cash Flows diskutiert. Im Anschluss daran wird in Kapitel 4 das dem Standard-WACC-Ansatz zugrunde liegende Cash Flow-Dekompositionsprinzip, namentlich die Tax Shield-abhängige Dekomposition von Cash Flows, untersucht. Der Beitrag schließt in Kapitel 5 mit einer Zusammenfassung.

⁶ Fama (1977), S. 4.

2. Marktwertermittlung nach Miles/Ezzell

2.1 Bewertungsformel

Der als Marktwert künftiger Total Cash Flows definierte Marktwert des Gesamtkapitals kann unter den hier getroffenen Annahmen des Standard-DCF-Modells mit unterstellter wertorientierter Finanzierungspolitik nach den Ergebnissen von Miles/Ezzell (1980) (1985) wie folgt ermittelt werden:⁷

$$(1) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FCF} + V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_t]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}}, \quad E_0[\tilde{TS}_t] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot q \cdot r \cdot s$$

Der erste Summenausdruck beschreibt den Marktwert künftiger Free Cash Flows, der zweite Summenausdruck den Marktwert künftiger Tax Shields. Der Planungszeitraum umfasst T Perioden. Die erwarteten Free Cash Flows werden über alle Perioden mit dem im Zeitablauf als konstant angenommenen Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung k^{FCF} diskontiert. Die erwarteten Tax Shields hingegen werden über eine Periode mit dem im Zeitablauf ebenfalls als konstant angenommenen risikolosen Zinssatz r und über alle verbleibenden Perioden mit dem Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung k^{FCF} diskontiert. Der im Bewertungszeitpunkt 0 für den Zeitpunkt t erwartete Tax Shield $E_0[\tilde{TS}_t] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot q \cdot r \cdot s$ ergibt sich als Produkt aus der für den Zeitpunkt t erwarteten Zinszahlung an die Fremdkapitalgeber $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot q \cdot r$ und dem Ertragsteuersatz s . Die für den Zeitpunkt t erwartete Zinszahlung bemisst sich nach dem für den Zeitpunkt $t-1$ erwarteten Fremdkapitalbestand $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot q$ und dem risikolosen Zinssatz r . Der für den Zeitpunkt $t-1$ erwartete Fremdkapitalbestand wiederum wird als Produkt aus dem für den Zeitpunkt $t-1$ erwarteten Gesamtkapitalmarktwert $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$ und der im Zeitablauf als konstant angenommenen Zielkapitalstruktur q bestimmt.

Gleichung (1) beschreibt den auf den Zeitpunkt 0 bezogenen Marktwert des Gesamtkapitals. Die im Bewertungszeitpunkt 0 erwartete Marktwertentwicklung des Gesamtkapitals lässt sich in der Darstellung von Miles/Ezzell wie folgt formulieren:

$$(2) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}] + E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}] = \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} + \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_s]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{s-t}}, \quad t = 1, \dots, T$$

Hiernach ergibt sich der für den Zeitpunkt $t-1$ erwartete Marktwert des Gesamtkapitals als der auf diesen Zeitpunkt bezogene Marktwert der in allen Folgeperioden erwarteten Cash Flows. Als nächstes soll die Frage nach der Bestimmung der Tax Shields im Miles/Ezzell-Modell diskutiert werden.

2.2 Tax Shield-Bestimmung

In der Bestimmung der erwarteten Tax Shields stellt sich das bekannte Zirkularitätsproblem: Für die Berechnung derselben benötigt man die Kenntnis über die Entwicklung des erwarteten Gesamtkapitalmarktwertes im Zeitablauf $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$, $t = 1, \dots, T$, mithin auch die Kenntnis über den auf den Zeitpunkt 0 bezogenen Gesamtkapitalmarktwert $E_0[\tilde{V}_0^{TCF}] = V_0^{TCF}$. Die vollständige Kalkulation aller in die Bewertung involvierten Tax Shields gelingt offensichtlich nur dann, wenn das Bewertungsergebnis bereits vorweggenommen wird.

Die wohl einfachste Möglichkeit, die erwarteten Tax Shields zu berechnen, besteht darin, die zeitpunktbezogenen erwarteten Gesamtkapitalmarktwerte $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$, $t = 1, \dots, T$ nach der Bewertungsformel des WACC-Ansatzes zu kalkulieren und anschließend in die Bestimmungsgleichung der erwarteten Tax Shields $E_0[\tilde{TS}_t]$, $t = 1, \dots, T$ einzusetzen. In diesem Beitrag soll eine matrixorientierte Lösung des Zirkularitätsproblems zur Anwendung kommen. Die Matrixdarstellung des von Miles/Ezzell entwickelten

⁷ Vgl. Miles/Ezzell (1980), S. 722 ff.; Miles/Ezzell (1985), S. 1488, Gleichung (19). Vgl. auch Steiner/Wallmeier (1999), S. 5 im Kontext eines Zwei-Phasen-Modells mit im Zeitablauf variierenden erwarteten Cash Flows in der ersten Phase und geometrisch wachsenden erwarteten Cash Flows über einen unendlichen Zeitraum in der zweiten Phase. Der Prototyp des APV-Ansatzes mit unterstellter wertorientierter Finanzierung geht auf Myers (1974) zurück, wenngleich die obenstehende Bewertungsformel in seinem Beitrag nicht explizit aufgeführt wird.

Bewertungskalküls führt zwar im Ergebnis zu einer Lösung nach dem WACC-Ansatz, der Matrix-Algorithmus ist jedoch als *eigenständige* Lösung zu interpretieren, der eine Bestimmung von $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$, $t=1, \dots, T$ und in weiterer Folge $E_0[\tilde{T}S_t]$, $t=1, \dots, T$ ohne Rückgriff auf die Bewertungsleistung des WACC-Ansatzes vornimmt. Hiernach erhält man:⁸

$$(3) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] = \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} \cdot a^{s-t+1}, \quad t=1, \dots, T$$

$$(4) \quad E_0[\tilde{T}S_t] = (1+r) \cdot \left(\frac{a-1}{a} \right) \cdot \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} \cdot a^{s-t+1}, \quad t=1, \dots, T$$

$$a = \frac{1+r}{1+r \cdot (1-q \cdot s)} \left(= \frac{1+k^{FCF}}{1+WACC} \right), \quad (1+r) \cdot \left(\frac{a-1}{a} \right) = q \cdot r \cdot s$$

Die in Gleichung (1) definierte Bestimmungsgleichung des Marktwertes künftiger Tax Shields V_0^{TS} lässt sich unter Verwendung von (4) wie folgt schreiben:

$$(5) \quad V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{T}S_t]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}} = \sum_{t=1}^T \frac{(1+r) \cdot \left(\frac{a-1}{a} \right) \cdot \sum_{s=t}^T \left(\frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} \cdot a^{s-t+1} \right)}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}}$$

Gleichung (5) kann wie folgt präzisiert werden:⁹

$$(6) \quad V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{FCF})^t} \cdot (a^t - 1) = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{FCF})^t} \cdot a^t - \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{FCF})^t} = V_0^{TCF} - V_0^{FCF}$$

In der Interpretation von (6) ergibt sich der Marktwert künftiger Tax Shields als Marktwert künftiger Total Cash Flows V_0^{TCF} abzüglich des Marktwertes künftiger Free Cash Flows V_0^{FCF} . Der Marktwert künftiger Total Cash Flows V_0^{TCF} wird dabei über eine multiplikative Adjustierung der Marktwerte künftiger Free Cash Flows bestimmt.¹⁰

⁸ Diese Möglichkeit der Tax Shield-Bestimmung soll hier nicht problematisiert werden. Im Mittelpunkt dieses Beitrages stehen die methodischen Aspekte der verschiedenen DCF-Bewertungsformeln und dies unbeschadet davon, ob die Gleichungen in impliziter oder expliziter Form auftreten.

⁹ Vgl. die Ableitung in Anhang I.

¹⁰ Die Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes V_0^{TCF} kann mit Hilfe von

$$\frac{a^t}{(1+k^{FCF})^t} = \left(\frac{a}{1+k^{FCF}} \right)^t = \left(\frac{a}{1+k^{FCF}} \right)^t \cdot \frac{(1+r)^t}{(1+r)^t} = \left(a \cdot \frac{1+r}{1+k^{FCF}} \right)^t \cdot \frac{1}{(1+r)^t}$$

auch wie folgt geschrieben werden:

$$V_0^{TCF} = V_0^{FCF} + V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t] \cdot \left(a \cdot \frac{1+r}{1+k^{FCF}} \right)^t}{(1+r)^t}$$

Eine dieser Gleichung prinzipiell entsprechende Formel wird bei Richter (2002) auf Basis eines multiplikativen Binomial Free Cash Flow-Prozesses und unter Verwendung von risikoneutralen Bewertungs- und Lösungsverfahren abgeleitet. [Vgl. Richter (2002), S. 142 f.]. Im Gegensatz zu der hier dargestellten Bewertungsgleichung erfolgt in der Interpretation von Richter keine Adjustierung der Marktwerte der Free Cash Flows, sondern eine Adjustierung der erwarteten Free Cash Flows selbst. Die Formel verwendet „a risk-adjusted [...] rate to generate certainty equivalents, which in turn must be discounted at the risk-free rate.“ [Richter (2002), S. 143].

$$(7) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{FCF})^t} \cdot a^t = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{FCF})^t} \cdot \left(\frac{1+r}{1+r \cdot (1-q \cdot s)} \right)^t$$

Für $q = 0$ und/oder $s = 0$ erhält man erwartungsgemäß $V_0^{TCF} = V_0^{FCF}$ beziehungsweise $V_0^{TS} = 0$.

Als Nächstes soll die im Bewertungszeitpunkt 0 erwartete Marktwertentwicklung des Tax Shield-Zahlungsstromes in der hier verwendeten Schreibweise präsentiert werden. Der im Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt $t-1$ erwartete Marktwert der in allen Folgeperioden anfallenden Tax Shields lässt sich vollkommen analog zur Ableitung von (6) bestimmen:

$$(8) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}] = \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} \cdot (a^{s-t+1} - 1) = \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} \cdot a^{s-t+1} - \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}}$$

$$= E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] - E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}], \quad t = 1, \dots, T$$

(4) und (8) beschreiben jeweils eine im Bewertungszeitpunkt 0 gebildete Erwartung, mithin eine unbedingte Erwartung. Die diesen Gleichungen entsprechenden bedingten Erwartungen können vollkommen analog zur Ableitung von (4) und (8) bestimmt werden. Von Bedeutung für die in diesem Beitrag angeführten Beispielrechnungen sind dabei die unter dem Informationsstand von $t-1$ gebildeten Erwartungen:

$$(9) \quad E_{t-1}[\tilde{TS}_t] = (1+r) \cdot \left(\frac{a-1}{a} \right) \cdot \sum_{s=t}^T \frac{E_{t-1}[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} \cdot a^{s-t+1}, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(10) \quad E_{t-1}[\tilde{V}_{t-1}^{TS}] = V_{t-1}^{TS} = \sum_{s=t}^T \frac{E_{t-1}[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} \cdot (a^{s-t+1} - 1) = \sum_{s=t}^T \frac{E_{t-1}[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} \cdot a^{s-t+1} - \sum_{s=t}^T \frac{E_{t-1}[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}}$$

$$= V_{t-1}^{TCF} - V_{t-1}^{FCF}, \quad t = 1, \dots, T$$

Gleichung (9) beschreibt den unter dem Informationsstand von $t-1$ mit Sicherheit bekannten Tax Shield der Folgeperiode t . Dieser Tax Shield wird hier im Wege einer einheitlichen Begriffsverwendung mit $E_{t-1}[\tilde{TS}_t]$ bezeichnet. Gleichung (10) beschreibt den unter dem Informationsstand von $t-1$ gebildeten Marktwert aller Folge-Tax Shields. Dieser im Zeitpunkt $t-1$ gebildete Marktwert ist relativ zu den im Zeitpunkt $t-1$ verfügbaren Informationen als Punktwert zu deuten: $E_{t-1}[\tilde{V}_{t-1}^{TS}] = V_{t-1}^{TS}$.

Gleichung (9) und Gleichung (10) machen einmal mehr deutlich, dass im DCF-Modell mit unterstellter wertorientierter Finanzierung die künftigen Tax Shields und in weiterer Folge auch die Marktwerte dieser Tax Shields in letzter Konsequenz von den Free Cash Flows der Unternehmung bestimmt werden.

2.3 Beispiel

In Kapitel 3 werden von der Theorie bislang nicht behandelte DCF-Bewertungsformeln zur Diskussion gestellt. Diese Bewertungsgleichungen sollen auch im Hinblick auf die Stochastizität der bedingten erwarteten Renditen untersucht werden. Die Standard-DCF-Bewertungsformeln bei unterstellter wertorientierter Finanzierung sind bekanntlich unter den hier getroffenen Annahmen durch deterministische bedingte erwartete Renditen charakterisiert. Die im Rahmen des APV-, TCF, WACC- und FTE-Ansatzes zur Anwendung kommenden Kalkulationszinssätze sind in weiterer Folge mit den bedingten erwarteten Renditen der Kapitalpositionen gleichzusetzen. Die Nicht-Stochastizität der Kapitalkosten trifft auch auf die hier vorgestellten Bewertungsgleichungen zu, was nicht nur formal, sondern auch durch den Augenschein der Berechnung gezeigt werden soll. Diese Illustration erfordert eine konkrete Spezifikation des stochastischen Free Cash Flow-Prozesses.

Das vermeintlich einfachste Cash Flow-Modell manifestiert sich in der Annahme eines Binomial Cash Flow-Prozesses. Dieses Modell besticht durch seine Einfachheit und Transparenz, ohne die wesentlichen Wirkungszusammenhänge und Problembestandteile des DCF-Modells zu vernachlässigen.¹¹ Dem Untersuchungsziel dieses Beitrages folgend sind hier jene Cash Flow-Prozesse von Bedeutung, aus denen

¹¹ Vgl. zum Binomial Cash Flow-Modell insbesondere Richter (2001); Richter (2002).

Bewertungsgleichungen in risikozuschlagsorientierter Form hervorgehen. Vor diesem Hintergrund wird im Folgenden ein so genannter multiplikativer Binomial Free Cash Flow-Prozess unterstellt.¹² Dieser Prozess soll die in nachstehender Abbildung dargestellte Dynamik aufweisen.¹³

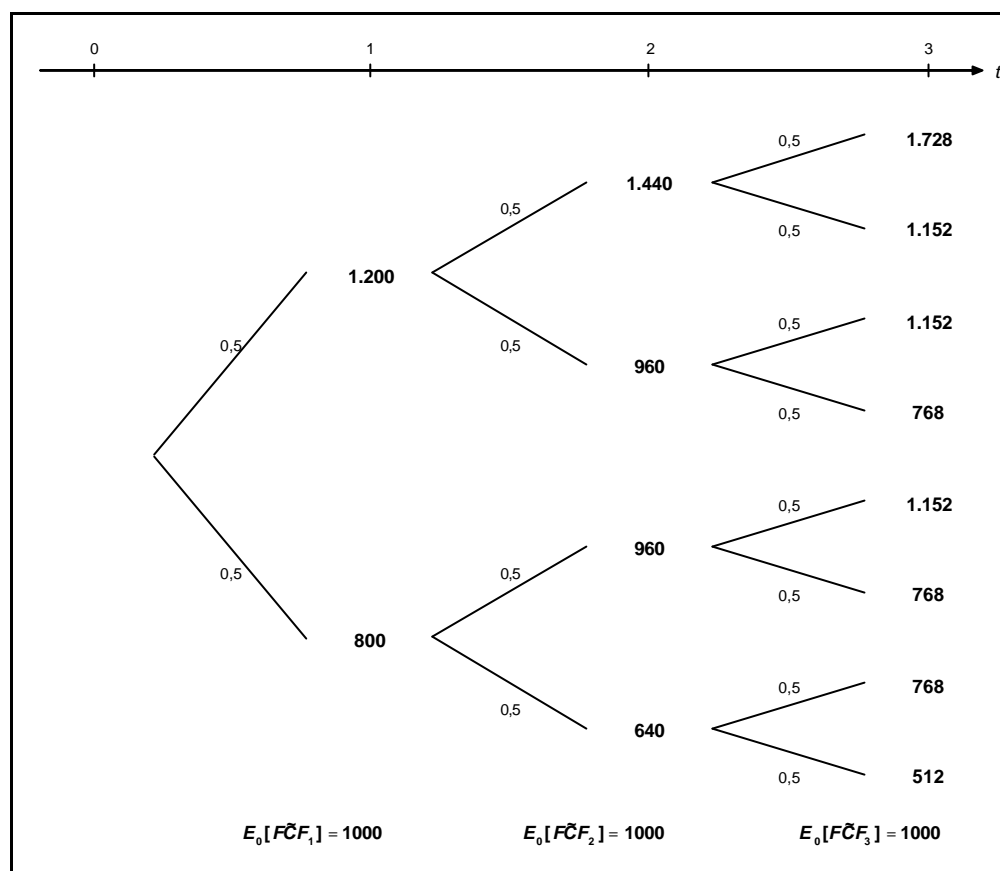


Abb. 1: Zustandsbaum aus Free Cash Flows mit bedingten statistischen Wahrscheinlichkeiten

Der Planungszeitraum umfasst $T=3$ Perioden. Die relativen Cash Flow-Veränderungen in einer Periode $[t-1, t]$ werden im Binomial-Modell durch die Veränderungsraten beziehungsweise Volatilitätsfaktoren u_t ($u = \text{up}$) und d_t ($d = \text{down}$) beschrieben. In dem hier diskutierten Beispiel werden im Zeitablauf konstante Veränderungsraten unterstellt: In jedem Zeitpunkt und Zustand steigt beziehungsweise fällt der Free Cash Flow des Folgezeitpunktes ausgehend von dem realisierten Cash Flow des vorhergehenden Zeitpunktes multiplikativ um den Faktor $1+u = 1+0,2$ beziehungsweise $1+d = 1-0,2$. Der (fiktive) Startwert des Cash Flow-Prozesses ist dabei gleich 1000. Darüber hinaus wird angenommen, dass auch die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die Veränderung der Free Cash Flows über alle Zeitpunkte und Zustände gleich hoch sind: Die Wahrscheinlichkeit einer up- und down-Bewegung beträgt stets 0,5.

Charakteristisch für das multiplikative Cash Flow-Modell sind deterministische Wachstumsraten in den erwarteten Cash Flows. Die gegebenenfalls zeitvariablen (aber nicht stochastischen) Wachstumsraten in den

¹² Von der Ausprägung des unterstellten Free Cash Flow-Prozesses ist es letztendlich abhängig, ob die verschiedenen DCF-Bewertungsgleichungen in risikozuschlagsorientierter oder sicherheitsäquivalenter Form auftreten. Während additive Cash Flow-Prozesse im Allgemeinen zu einer auf Basis von Sicherheitsäquivalenten formulierte Bewertungsgleichung führen, lassen sich unter geeigneten Annahmen für multiplikative Cash Flow-Prozesse und Cash Flow-Prozesse mit im Zeitablauf stochastisch unabhängigen Zahlungen Bewertungsgleichungen auch in risikozuschlagsorientierter Form herleiten. Vgl. hierzu insbesondere Sick (1986); auch Fama (1996), S. 424 ff..

¹³ Für die Erstellung der in diesem Beitrag angeführten Graphiken danke ich herzlich Herrn Stefan Rost, Diplomand am Institut für Finanzierung und Finanzmärkte, Wirtschaftsuniversität Wien.

erwarteten Free Cash Flows ergeben sich dabei aus der folgenden Beziehung:¹⁴ $E_{t-1}[F\tilde{C}F_t] = (1 + g_t) \cdot FCF_{t-1}$, wobei der Ausdruck $E_{t-1}[F\tilde{C}F_t]$ den unter dem Informationsstand von $t-1$ bedingten Erwartungswert des Free Cash Flow des Folgezeitpunktes t , der Ausdruck FCF_{t-1} den in $t-1$ realisierten Free Cash Flow und g_t eine von der Zustandsrealisation in $t-1$ unabhängige Konstante bezeichnet. Der unter dem Informationsstand von $t-1$ bedingte Erwartungswert $E_{t-1}[F\tilde{C}F_t]$ des Free Cash Flow des Folgezeitpunktes t ist hiernach über alle Knoten des in Abbildung 1 dargestellten Zustandsbaumes um den Faktor $1 + g_t$ multiplikativ mit dem in $t-1$ realisierten Cash Flow FCF_{t-1} verknüpft. Der hier unterstellte Free Cash Flow-Prozess impliziert dabei eine im Zeitablauf konstante Wachstumsrate in den erwarteten Cash Flows in Höhe von $g = 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot (-0,20) = 0$.

Die auf der Basis der statistischen Zustandswahrscheinlichkeiten berechneten unbedingten erwarteten Free Cash Flows sind gleich $E_0[F\tilde{C}F_1] = E_0[F\tilde{C}F_2] = E_0[F\tilde{C}F_3] = 1000$. Sie sind in der obenstehenden Abbildung am unteren Rand abgetragen. Der im Zeitablauf als konstant angenommene Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung soll $k^{FCF} = 0,10$ betragen. Hieraus ergibt sich der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert künftiger Free Cash Flows zu:

$$V_0^{FCF} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{C}F_t]}{(1 + k^{FCF})^t} = \frac{1000}{1,10} + \frac{1000}{1,10^2} + \frac{1000}{1,10^3} = 2486,85199098$$

Die im Zeitablauf als konstant angenommene Zielkapitalstruktur soll $q = 0,40$, der im Zeitablauf ebenfalls als konstant angenommene risikolose Zinssatz $r = 0,05$ und der Ertragsteuersatz schließlich $s = 0,34$ betragen. Mit diesen Daten erhält man die in Abbildung 2 dargestellte Entwicklung der Tax Shields. Die zeit- und zustandsabhängigen Tax Shields wurden dabei nach Gleichung (9) kalkuliert.

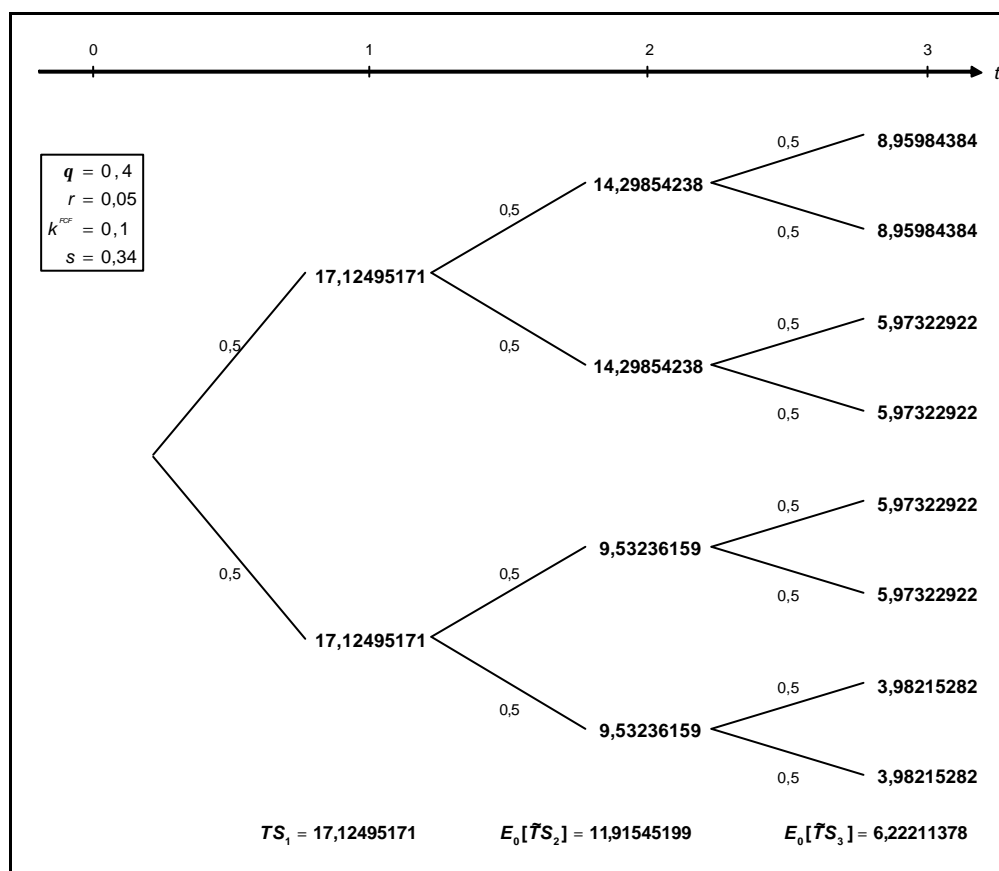


Abb. 2: Zustandsbaum aus Tax Shields mit bedingten statistischen Wahrscheinlichkeiten

¹⁴ Vgl. in etwas anderer Darstellung Kruschwitz/Löffler (2003), S. 36 ff.; Laitenberger/Löffler (2002), S. 7; Richter (2001), S. 178.

Der im Bewertungszeitpunkt 0 erwartete Tax Shield einer jeden Periode kann mit Hilfe von Gleichung (4) kalkuliert werden. Diese unbedingten Erwartungen sind am unteren Rand der Abbildung abgetragen. Der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert künftiger Tax Shields ist unter Zugrundelegung der Bewertungsformel von Miles/Ezzell gleich:

$$V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_t]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}} = \frac{17,12495171}{1,05} + \frac{11,91545199}{1,05 \cdot 1,10} + \frac{6,22211378}{1,05 \cdot 1,10^2} = \mathbf{31,52326055}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man unter Verwendung der aus der Matrixdarstellung des Miles/Ezzell-Kalküls abgeleiteten (WACC-)Bewertungsformel (6). Der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert künftiger Total Cash Flows, das heißt der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert des Gesamtkapitals ist schließlich gleich $V_0^{TCF} = V_0^{FCF} + V_0^{TS} = 2486,85199098 + 31,52326055 = \mathbf{2518,37525154}$.

3. Bewertungsprinzipien

Die in der Literatur diskutierten Modelle zur Herleitung von DCF-Bewertungsfunktionen lassen sich prinzipiell in zwei Gruppen einteilen: In der ersten Modellgruppe werden Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen, der Methodik von Modigliani/Miller (1958) (1963) folgend, auf der Grundlage des Konzepts von der Risikoklasse unter Verwendung des Arbitragefreiheitsprinzips abgeleitet. Eine konkrete Spezifizierung des bewertungsrelevanten stochastischen Cash Flow-Prozesses unterbleibt in dieser Modellvariante. Die in die Bewertung involvierten Kapitalkosten sind dann in letzter Konsequenz modellexogene Variable. In der zweiten Modellgruppe erfolgt eine konkrete Spezifizierung des bewertungsrelevanten stochastischen Cash Flow-Prozesses. Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen werden, der Methodik von Fama (1977) folgend, auf der Grundlage des explizierten Cash Flow-Prozesses unter Verwendung eines Erklärungsmodells für die gleichgewichtige beziehungsweise arbitragefreie Preisbildung am Kapitalmarkt abgeleitet. In dieser Modellvariante sind die in die Bewertung involvierten Kapitalkosten modellendogene Variable.

Beide genannten Modellgruppen – exogene und endogene Kapitalkostenbestimmung – legen das Prinzip der so genannten Rückwärtsrekursion zugrunde. Die Ableitungen in diesem Beitrag sowie die in diesem Zusammenhang angeführten Beispielberechnungen basieren dem Grundsatz nach auf dem Konzept der endogenen Kapitalkostenbestimmung, wenngleich das dem Ansatz zugrunde liegende Preisbildungsmodell hier nicht explizit offengelegt wird. Die im Wege der Rückwärtsrekursion zur Anwendung kommenden Bewertungs- und Lösungsprozeduren können, unbeschadet weiterer Spezifikationen, wie folgt beschrieben werden: Gegeben ist ein mehrperiodiger Zahlungsstrom aus riskanten Cash Flows $CF = (\tilde{CF}_1, \tilde{CF}_2, \dots, \tilde{CF}_T)$. Gesucht ist der Marktwert von CF im Bewertungszeitpunkt 0. Ausgehend vom Planungshorizont T werden die zeit- und zustandsabhängigen Marktwerte von CF in einer bis zum Bewertungszeitpunkt 0 fortschreitenden sukzessiven Rückwärtsrechnung ermittelt. Der in jedem Zeitpunkt und jedem Umweltzustand gebildete Marktwert des Zahlungsstroms wird dabei als der mit einem geeigneten Kalkulationszinssatz diskontierte erwartete Rückfluss der Folgeperiode bestimmt, wobei der erwartete Periodenrückfluss den für die Folgeperiode (*gegebenenfalls nicht vorhandenen*) erwarteten Cash Flow und den für die Folgeperiode erwarteten Marktwert aller darauffolgenden Cash Flows umfasst. Ergebnis dieser sukzessiv-retrograden Rechnung ist ein Marktwert im Bewertungszeitpunkt.

Die solcherart charakterisierte und in der Literatur als Roll Back-Verfahren bezeichnete Rückwärtsrekursion führt im Ergebnis auch zu einer Bestimmungsgleichung für die im Bewertungszeitpunkt 0 erwartete Marktwertentwicklung des Zahlungsstroms im Zeitablauf. Besteht der betrachtete Zahlungsstrom aus nur einem einzigen Cash Flow, dann liefert das Roll Back-Verfahren eine Bestimmungsgleichung für die im Bewertungszeitpunkt 0 erwartete Marktwertentwicklung dieses einen Cash Flow. Die erwartete Marktwertentwicklung des Gesamtzahlungsstroms (Verbundbewertung) beziehungsweise einzelner Cash Flows (Einzelbewertung) bildet in weiterer Folge die Grundlage für die Ableitung der von den verschiedenen DCF-Varianten verwendeten Kalkulationszinssätze.

3.1 Verbundbewertung von Cash Flows

3.1.1 Bewertungsmethodik

Dieses Bewertungsprinzip wird grundsätzlich dadurch charakterisiert, dass der bewertungsrelevante mehrperiodige Zahlungsstrom aus riskanten Cash Flows $CF = (\tilde{CF}_1, \tilde{CF}_2, \dots, \tilde{CF}_T)$ im Verbund, das heißt als Aggregat zusammenhängender Cash Flows, bewertet wird. Die Ableitung der in die Bewertung involvierten

Kapitalkostensätze erfolgt auf der Basis der im Bewertungszeitpunkt 0 erwarteten Marktwertentwicklung der jeweiligen Kapitalposition, wie sie im Falle der Verbundbewertung von Cash Flows in allgemeiner Darstellung gemäß nachstehender Gleichung beschrieben wird:

$$(1) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF}] = \frac{E_0[\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{V}_t^{CF}]}{1 + k_t^{CF}}, \quad t = 1, \dots, T$$

$E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF}]$ bezeichnet den im Bewertungszeitpunkt 0 für den Zeitpunkt $t-1$ erwarteten Marktwert des Zahlungsstroms, $E_0[\tilde{C}F_t]$ den im Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt t erwarteten Cash Flow, $E_0[\tilde{V}_t^{CF}]$ den im Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt t erwarteten Marktwert des Zahlungsstroms und k_t^{CF} schließlich den bewertungsrelevanten Kalkulationszinssatz der Periode t . Es ist augenscheinlich, dass der Kalkulationszinssatz k_t^{CF} jenen Diskontierungszinssatz beschreibt, mit dem der im Bewertungszeitpunkt 0 für den Zeitpunkt t erwartete Periodenrückfluss inklusive Folgemarktwert, $E_0[\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{V}_t^{CF}]$, um eine Periode abzuzinsen ist, damit der resultierende Barwert dem im Bewertungszeitpunkt 0 für den Zeitpunkt $t-1$ erwarteten Marktwert des Zahlungsstroms $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF}]$ entspricht.¹⁵

$$(2) \quad k_t^{CF} = \frac{E_0[\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{V}_t^{CF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF}]} - 1, \quad t = 1, \dots, T$$

Gleichung (1) und in weiterer Folge auch Gleichung (2) beschreiben keinen per definitionem begründeten Zusammenhang, sondern eine aus den Annahmen des Modells abgeleitete fundamentale Beziehung, die letztendlich jede DCF-Modellvariante mit kapitalkostenbasierten Bewertungs- und Lösungsprozeduren charakterisiert.

Wird die Bestimmungsgleichung von $E_0[\tilde{V}_{T-1}^{CF}]$ in $E_0[\tilde{V}_{T-2}^{CF}]$, der sich ergebende Ausdruck für $E_0[\tilde{V}_{T-2}^{CF}]$ wiederum in $E_0[\tilde{V}_{T-3}^{CF}]$ eingesetzt und wird dieses rekursive Einsetzungsprozedere bis zum Bewertungszeitpunkt 0 fortgeführt, dann kann (1) auch folgendermaßen dargestellt werden:

$$(3) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF}] = \sum_{i=t}^T \frac{E_0[\tilde{C}F_i]}{\prod_{s=t}^i (1 + k_s^{CF})}, \quad t = 1, \dots, T, \quad k_s^{CF} = \frac{E_0[\tilde{C}F_s] + E_0[\tilde{V}_s^{CF}]}{E_0[\tilde{V}_{s-1}^{CF}]} - 1$$

Hiernach ergibt sich der für den Zeitpunkt $t-1$ erwartete Marktwert des Zahlungsstroms als der auf diesen Zeitpunkt bezogene und mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte Barwert der in allen Folgeperioden erwarteten Zahlungen. Der auf den Bewertungszeitpunkt 0 bezogene Marktwert künftiger Cash Flows ergibt sich schließlich zu:

$$(3) \quad V_0^{CF} = \sum_{i=1}^T \frac{E_0[\tilde{C}F_i]}{\prod_{t=1}^i (1 + k_t^{CF})}, \quad k_t^{CF} = \frac{E_0[\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{V}_t^{CF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF}]} - 1$$

Die Bewertungsmodalitäten der verschiedenen DCF-Varianten werden im folgenden, wie eingangs erwähnt, in Bezug auf den als Marktwert künftiger Total Cash Flows definierten Marktwert des Gesamtkapitals herausgearbeitet.

3.1.2 Bewertungsgleichungen

3.1.2.1 FTE-Verbund-Bewertungsansatz

Der als Marktwert künftiger Total Cash Flows $TCF = (T\tilde{C}F_1, T\tilde{C}F_2, \dots, T\tilde{C}F_T)$ definierte Marktwert des Gesamtkapitals ergibt sich in der Darstellung des FTE-Ansatzes als Marktwert künftiger Flows to Equity $FTE = (F\tilde{T}E_1, F\tilde{T}E_2, \dots, F\tilde{T}E_T)$ zuzüglich des Marktwertes künftiger Flows to Debt

¹⁵ Vgl. zu den solcherart definierten Kapitalkosten, wenngleich auch kritisch, Kruschwitz/Löffler (2003), S. 10 f.

$FTD = (F\tilde{T}D_1, F\tilde{T}D_2, \dots, F\tilde{T}D_T)$. Die aus der Verbundbewertung von Flows to Equity und Flows to Debt resultierende Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes lautet:

$$(1) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FTE} + V_0^{FTD} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{T}E_t]}{\prod_{i=1}^t (1+k_t^{FTE})} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{T}D_t]}{\prod_{i=1}^t (1+k_t^{FTD})}$$

$$k_t^{FTE} = \frac{E_0[F\tilde{T}E_t] + E_0[\tilde{V}_t^{FTE}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]} - 1, \quad k_t^{FTD} = \frac{E_0[F\tilde{T}D_t] + E_0[\tilde{V}_t^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]} - 1$$

Die in den Bestimmungsgleichungen von k_t^{FTE} und k_t^{FTD} angeführten Ausdrücke $E_0[F\tilde{T}E_t]$ und $E_0[F\tilde{T}D_t]$ beschreiben den im Bewertungszeitpunkt 0 für den Zeitpunkt t erwarteten Flow to Equity und Flow to Debt. Diese erwarteten Cash Flows lassen sich vor dem Hintergrund des in Tabelle 1 angeführten Cash Flow-Schemas folgendermaßen präzisieren:

$$(2a) \quad E_0[F\tilde{T}D_t] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot \mathbf{q} \cdot r + \left(E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] - E_0[\tilde{V}_t^{TCF}] \right) \cdot \mathbf{q}$$

$$(2b) \quad E_0[F\tilde{T}E_t] = E_0[T\tilde{C}F_t] - E_0[F\tilde{T}D_t] = E_0[T\tilde{C}F_t] - E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot \mathbf{q} \cdot r - \left(E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] - E_0[\tilde{V}_t^{TCF}] \right) \cdot \mathbf{q}$$

Der auf der rechten Seite von Gleichung (2a) links stehende Ausdruck $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot \mathbf{q} \cdot r$ beschreibt die für den Zeitpunkt t erwartete Zinszahlung an das Fremdkapital, der rechts stehende Ausdruck $(E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] - E_0[\tilde{V}_t^{TCF}]) \cdot \mathbf{q}$ die für die Periode t erwartete Veränderung des Fremdkapitalbestandes. Ein positives Vorzeichen dieses Ausdrucks impliziert eine erwartete Tilgungszahlung, ein negatives Vorzeichen hingegen eine erwartete Fremdkapitalaufnahme im Zeitpunkt t . Der für die Periode t erwartete Flow to Equity ergibt sich aus dem für die Periode t erwarteten Total Cash Flow abzüglich des für die Periode t erwarteten Flow to Debt.

Die den Bestimmungsgleichungen von k_t^{FTE} und k_t^{FTD} stehenden Terme $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]$ und $E_0[\tilde{V}_t^{FTE}]$ sowie $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]$ und $E_0[\tilde{V}_t^{FTD}]$ beschreiben die im Bewertungszeitpunkt 0 für die Zeitpunkte $t-1$ und t erwarteten Eigen- und Fremdkapitalmarktwerte. Diese Marktwertenerwartungen sind über die als (deterministisches) Verhältnis von Fremdkapital- zu Gesamtkapitalmarktwert gemessene Fremdkapitalquote \mathbf{q} mit dem erwarteten Gesamtkapitalmarktwert verknüpft:

$$(3a) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot \mathbf{q} \quad \text{und} \quad E_0[\tilde{V}_t^{FTD}] = E_0[\tilde{V}_t^{TCF}] \cdot \mathbf{q}$$

$$(3b) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot (1-\mathbf{q}) \quad \text{und} \quad E_0[\tilde{V}_t^{FTE}] = E_0[\tilde{V}_t^{TCF}] \cdot (1-\mathbf{q})$$

Werden die gemäß (2a) und (2b) sowie (3a) und (3b) definierten Ausdrücke in die nach (1) definierten Bestimmungsgleichungen von k_t^{FTE} und k_t^{FTD} eingesetzt, dann erhält man nach Zusammenfassen von Termen und entsprechendes Kürzen:

$$(4a) \quad k_t^{FTE} = \left(\frac{E_0[T\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{V}_t^{TCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]} - 1 - \mathbf{q} \cdot r \right) \cdot \frac{1}{1-\mathbf{q}}, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(4b) \quad k_t^{FTD} = r, \quad t = 1, \dots, T$$

Der erwartete Total Cash Flow $E_0[T\tilde{C}F_t]$ aus Gleichung (4a) wird durch folgende Gleichung erklärt:

$$(5a) \quad E_0[T\tilde{C}F_t] = E_0[F\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{T}S_t] = E_0[F\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] \cdot \mathbf{q} \cdot r \cdot s$$

Die Ausdrücke $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$ und $E_0[\tilde{V}_t^{TCF}]$ beschreiben die im Bewertungszeitpunkt 0 für die Zeitpunkte $t-1$ und t erwarteten Marktwerte der in allen Folgeperioden anfallenden Total Cash Flows. Diese erwarteten Gesamtkapitalmarktwerte lassen sich nach Miles/Ezzell wie folgt formulieren:

$$(5b) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}] + E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}] = \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t+1}} + \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_s]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{s-t}}$$

$$(5c) \quad E_0[\tilde{V}_t^{TCF}] = E_0[\tilde{V}_t^{FCF}] + E_0[\tilde{V}_t^{TS}] = \sum_{s=t+1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_s]}{(1+k^{FCF})^{s-t}} + \sum_{s=t+1}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_s]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{s-t-1}}$$

Durch Einsetzen der gemäß (5a), (5b) und (5c) definierten Ausdrücke in die Bestimmungsgleichungen von k_t^{FTE} , $t=1, \dots, T$ nach (4a) können die von dem FTE-Verbund-Bewertungsansatz verwendeten Diskontierungszinssätze mit Hilfe geeigneter Umformungen wie folgt präzisiert werden:¹⁶

$$(6a) \quad k_t^{FTE} = k^{FTE} = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{q}{1-q}, \quad t=1, \dots, T$$

beziehungsweise in etwas anderer Schreibweise mit $q = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TDF}] / E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$ und $(1-q) = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}] / E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$:

$$k_t^{FTE} = k^{FTE} = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TDF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]}, \quad t=1, \dots, T$$

Die gemäß (6a) definierten Kalkulationszinssätze des FTE-Ansatzes $k_t^{FTE} = k^{FTE}$, $t=1, \dots, T$, lassen sich auch in der Darstellung des Konzepts der gewogenen durchschnittlichen Kapitalkosten formulieren:

$$(6b) \quad k_t^{FTE} = k^{FTE} = k^{TCF} \cdot \frac{1}{1-q} - r \cdot \frac{q}{1-q} = k^{TCF} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]} - r \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TDF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]}, \quad t=1, \dots, T$$

$$k_t^{TCF} = k^{TCF} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot q, \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] - E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TDF}]$$

Hiernach ergeben sich die Diskontierungszinssätze $k_t^{FTE} = k^{FTE}$, $t=1, \dots, T$, jeweils als Differenz der mit den periodenbezogenen Marktwertanteilen von Gesamt- und Fremdkapital gewichteten Gesamt- und Fremdkapitalkosten der Periode, wobei die periodenbezogenen Marktwertanteile von Gesamt- und Fremdkapital der Definition des Eigenkapitalmarktwertes entsprechend in Bezug auf $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] - E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TDF}]$ bestimmt werden. Die Ableitung der im Zeitablauf konstanten Kapitalkosten des TCF-Zahlungsstroms $k_t^{TCF} = k^{TCF}$, $t=1, \dots, T$, erfolgt im nächsten Abschnitt.

Ebenso denkbar wäre es, den Marktwert des Eigenkapitals entsprechend der Konzeption des APV-Ansatzes als Marktwert künftiger Free Cash Flows zuzüglich des Marktwertes künftiger Tax Shields abzüglich des Marktwertes künftiger Flows to Debt zu definieren. In diesem Fall präsentieren sich die Bestimmungsgleichungen von $k_t^{FTE} = k^{FTE}$, $t=1, \dots, T$ in der Darstellung des Konzepts der gewogenen durchschnittlichen Kapitalkosten als:

$$(6c) \quad k_t^{FTE} = k^{FTE} = k^{FCF} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]} + k_t^{TS} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]} - r \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TDF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]}, \quad t=1, \dots, T$$

$$k_t^{TS} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TDF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]}, \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}] + E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}] - E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TDF}]$$

Die Ableitung der im Zeitablauf variablen (aber nicht stochastischen) Kapitalkosten des Tax Shield-Zahlungsstroms k_t^{TS} , $t=1, \dots, T$ erfolgt in Abschnitt 3.1.2.4.

Die aus der Verbundbewertung von Flows to Equity und Flows to Debt abgeleitete Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes V_0^{TCF} lässt sich schließlich in der Darstellung von (6a) wie folgt angeben:

¹⁶ Vgl. die Ableitung in Anhang II.

$$(7) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FTE} + V_0^{FID} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{T}E_t]}{(1+k^{FTE})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{T}D_t]}{(1+r)^t}$$

$$k^{FTE} = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{q}{1-q}$$

Im Ergebnis bleibt festzuhalten, dass die Verbundbewertung von Flows to Equity zu der Standard-Bewertungsformel des FTE-Ansatzes führt.¹⁷ Für das hier betrachtete Zahlenbeispiel mit Planungshorizont $T=3$ erhält man nach (7) einen Gesamtkapitalmarktwert in Höhe von:

$$\begin{aligned} V_0^{TCF} &= \left(\frac{E_0[F\tilde{T}E_1]}{1+k^{FTE}} + \frac{E_0[F\tilde{T}E_2]}{(1+k^{FTE})^2} + \frac{E_0[F\tilde{T}E_3]}{(1+k^{FTE})^3} \right) + \left(\frac{E_0[F\tilde{T}D_1]}{1+r} + \frac{E_0[F\tilde{T}D_2]}{(1+r)^2} + \frac{E_0[F\tilde{T}D_3]}{(1+r)^3} \right) \\ &= \left(\frac{660,31628650}{1,13279365} + \frac{641,96775722}{1,13279365^2} + \frac{621,91508645}{1,13279365^3} \right) + \left(\frac{356,80866521}{1,05} + \frac{369,94769476}{1,05^2} + \frac{384,30702733}{1,05^3} \right) \\ &= 1511,02515092 + 1007,35010061 = \mathbf{2518,37525154} \end{aligned}$$

$$k^{FTE} = 0,10 + (0,10 - 0,05) \cdot \frac{1+0,05 \cdot (1-0,34)}{1+0,05} \cdot \frac{0,40}{1-0,40} = 0,13279365$$

Die nach dem FTE-Verbund-Bewertungsansatz kalkulierten (*Bar*-)Wertbeiträge der periodischen Cash Flows zum Gesamtkapitalmarktwert betragen:

$$\begin{aligned} V_0^{TCF} &= \left(\frac{E_0[F\tilde{T}E_1]}{1+k^{FTE}} + \frac{E_0[F\tilde{T}D_1]}{1+r} \right) + \left(\frac{E_0[F\tilde{T}E_2]}{(1+k^{FTE})^2} + \frac{E_0[F\tilde{T}D_2]}{(1+r)^2} \right) + \left(\frac{E_0[F\tilde{T}E_3]}{(1+k^{FTE})^3} + \frac{E_0[F\tilde{T}D_3]}{(1+r)^3} \right) \\ &= \left(\frac{660,31628650}{1,13279365} + \frac{356,80866521}{1,05} \right) + \left(\frac{641,96775722}{1,13279365^2} + \frac{369,94769476}{1,05^2} \right) + \left(\frac{621,91508645}{1,13279365^3} + \frac{384,30702733}{1,05^3} \right) \\ &= \mathbf{922,7273708} + \mathbf{835,831694} + \mathbf{759,816188} = 2518,37525154 \end{aligned}$$

Abbildung 3 zeigt die zeitliche Entwicklung der bedingten erwarteten Renditen des Flow to Equity-Prozesses. Der in jedem Knotenpunkt von $t=1,2$ in der unteren Hälfte des Kästchens angeführte Wert beschreibt den unter dem Informationsstand des jeweiligen 'Knotenpunktes' bedingten Marktwert aller künftigen Flows to Equity. Die bedingten erwarteten Renditen des FTE-Prozesses sind jeweils fett eingezeichnet. Der FTE-Verbund-Bewertungsansatz wird unter den Bedingungen des hier unterstellten multiplikativen Free Cash Flow-Prozesses durch deterministische bedingte erwartete Renditen charakterisiert.

¹⁷ Vgl. zu der Standard-Bewertungsformel des FTE-Ansatzes bei unterstellter wertorientierter Finanzierung Wallmeier (1999), S. 1477, Tabelle 2, Gleichung (5a) i.V.m. Gleichung (1a), sowie in etwas anderer Darstellung Kruschwitz/Löffler (2003), S. 56, Theorem 2.6 i.V.m. Gleichung (2.11), S. 64.

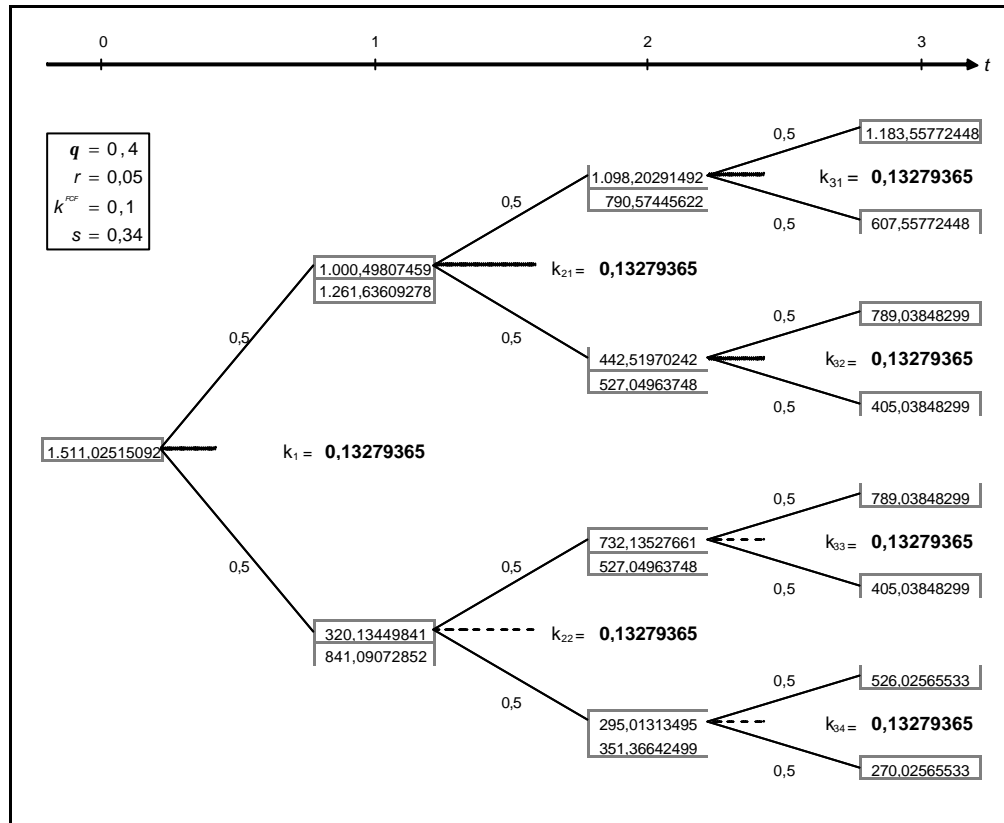


Abb. 3: Bedingte erwartete Renditen des Flow to Equity -Prozesses

3.1.2.2 TCF-Verbund-Bewertungsansatz

Bewertungsobjekt ist ein mehrperiodiger Zahlungsstrom aus riskanten Total Cash Flows $TCF = (T\tilde{C}F_1, T\tilde{C}F_2, \dots, T\tilde{C}F_T)$. Gesucht ist der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert von TCF , namentlich der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert des Gesamtkapitals. Die aus der Verbundbewertung von Total Cash Flows resultierende Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes lautet:

$$(1) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[T\tilde{C}F_t]}{\prod_{t=1}^t (1 + k_t^{TCF})}, \quad k_t^{TCF} = \frac{E_0[T\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{V}_t^{TCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]} - 1$$

Die von dem TCF-Verbund-Bewertungsansatz verwendeten Diskontierungszinssätze k_t^{TCF} , $t = 1, \dots, T$ können vollkommen analog zu den Ableitungen im FTE-Verbund-Bewertungsansatz mit Hilfe der nach Miles/Ezzell definierten Bestimmungsgleichungen von $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$ und $E_0[\tilde{V}_t^{TCF}]$ präzisiert werden:¹⁸

$$(2a) \quad k_t^{TCF} = k^{TCF} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1 + r} \cdot q = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1 + r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]}, \quad t = 1, \dots, T$$

Die Kalkulationszinssätze des TCF-Verbund-Bewertungsansatzes lassen sich auch in der Darstellung des Konzepts der gewogenen durchschnittlichen Kapitalkosten formulieren. Im folgenden sollen wiederum zwei mögliche Varianten einer solchen Formulierung vorgestellt werden. In der bekannten Standardvariante wird der als Marktwert künftiger Total Cash Flows definierte Marktwert des Gesamtkapitals in den als Marktwert künftiger Flows to Equity definierten Marktwert des Eigenkapitals und den als Marktwert künftiger Flows to Debt definierten Marktwert des Fremdkapitals zerlegt:

¹⁸ Vgl. die Ableitung in Anhang III.

$$(2b) \quad k_t^{TCF} = k^{TCF} = k^{FTE} \cdot (1-q) + r \cdot q = k^{FTE} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]} + r \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]}, \quad t = 1, \dots, T$$

$$k_t^{FTE} = k^{FTE} = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{q}{1-q} = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}]}$$

$$E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE}] + E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]$$

In der nachfolgend angeführten Darstellungsvariante wird der als Marktwert künftiger Total Cash Flows definierte Marktwert des Gesamtkapitals in den als Marktwert künftiger Free Cash Flows definierten Marktwert bei vollständiger Eigenfinanzierung und den als Marktwert künftiger Tax Shields definierten Marktwert der von der Fremdfinanzierung induzierten Steuervorteile zerlegt:

$$(2c) \quad k_t^{TCF} = k^{TCF} = k^{FCF} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]} + k_t^{TS} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]}, \quad t = 1, \dots, T$$

$$k_t^{TS} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]}, \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}] + E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]$$

Der Quotient aus $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}]$ und $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$ beschreibt den im Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt $t-1$ erwarteten Anteil des Marktwertes bei vollständiger Eigenfinanzierung am Marktwert des Gesamtkapitals, der Quotient aus $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]$ und $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]$ den für den Zeitpunkt $t-1$ erwarteten Anteil des Marktwertes der Steuervorteile am Marktwert des Gesamtkapitals. Die für den Zeitpunkt $t-1$ erwarteten Marktwertanteile des Free Cash Flow- und Tax Shield-Zahlungsstroms am Total Cash Flow-Zahlungsstrom werden in weiterer Folge mit den periodenbezogenen Kapitalkosten der Zahlungsströme gewichtet. Die Ableitung der im Zeitablauf variablen (aber nicht stochastischen) Kapitalkosten des Tax Shield-Zahlungsstroms k_t^{TS} , $t = 1, \dots, T$ erfolgt, wie bereits erwähnt, in Abschnitt 3.1.2.4.

Die aus der Verbundbewertung von Total Cash Flows abgeleitete Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes V_0^{TCF} lautet in der Darstellung von (2a):

$$(3) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{TCF}_t]}{(1+k^{TCF})^t}, \quad k^{TCF} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot q$$

Im Ergebnis bleibt festzuhalten, dass die Verbundbewertung von Total Cash Flows zu der Standard-Bewertungsformel des TCF-Ansatzes führt.¹⁹ Für das hier betrachtete Zahlenbeispiel mit Planungshorizont $T = 3$ erhält man nach (3) einen Gesamtkapitalmarktwert in Höhe von:

$$V_0^{TCF} = \frac{E_0[\tilde{TCF}_1]}{1+k^{TCF}} + \frac{E_0[\tilde{TCF}_2]}{(1+k^{TCF})^2} + \frac{E_0[\tilde{TCF}_3]}{(1+k^{TCF})^3} = \frac{1017,12495171}{1,09967619} + \frac{1011,91545199}{1,09967619^2} + \frac{1006,22211378}{1,09967619^3}$$

$$= 924,9313205 + 836,7863421 + 756,6575869 = 2518,37525154$$

$$k^{TCF} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{0,10 - 0,05}{1 + 0,05} \cdot 0,40 = 0,09967619$$

3.1.2.3 WACC-Verbund-Bewertungsansatz

Nach dem WACC-Ansatz ergibt sich der Marktwert des Gesamtkapitals vollkommen analog zum TCF-Ansatz als Marktwert künftiger Total Cash Flows $TCF = (\tilde{TCF}_1, \tilde{TCF}_2, \dots, \tilde{TCF}_T)$. Der Marktwert künftiger Total Cash Flows wird jedoch in dieser Modellvariante nicht als der mit geeigneten Diskontierungszinssätzen ermittelte Barwert der erwarteten Total Cash Flows, sondern als der mit geeigneten Diskontierungszinssätzen

¹⁹ Vgl. zu der Standard-Bewertungsformel des TCF-Ansatzes bei unterstellter wertorientierter Finanzierung Steiner/Wallmeier (1999), S. 4, Gleichung (8) i.V.m. Gleichung (2), S. 3, sowie Kruschwitz/Löffler (2003), S. 57, Theorem 2.7 i.V.m. Theorem 2.8, S. 58 und Gleichung (2.11), S. 64.

ermittelte Barwert der erwarteten Free Cash Flows bestimmt. Die aus der Verbundbewertung von Total Cash Flows resultierende Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes ergibt sich in der Schreibweise des WACC-Ansatzes zu:

$$(1) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{\prod_{t=1}^t (1+WACC_t^{FCF})}, \quad WACC_t^{FCF} = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t] + E_0[\tilde{V}_t^{TCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]} - 1$$

Die von dem WACC-Verbund-Bewertungsansatz verwendeten Diskontierungszinssätze $WACC_t^{FCF}$, $t = 1, \dots, T$ können wie folgt präzisiert werden:²⁰

$$(2a) \quad WACC_t^{FCF} = WACC^{FCF} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{1+k^{FCF}}{1+r} \cdot q, \quad t = 1, \dots, T$$

In der Darstellung des Konzepts der gewogenen durchschnittlichen Kapitalkosten erhält man:

$$(2b) \quad WACC_t^{FCF} = WACC^{FCF} = k^{FTE} \cdot (1-q) + r \cdot (1-s) \cdot q, \quad t = 1, \dots, T$$

$$k_t^{FTE} = k^{FTE} = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{q}{1-q}$$

Die Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes ist schließlich in der Darstellung von (2a) durch (3) gegeben:

$$(3) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{(1+WACC^{FCF})^t}, \quad WACC^{FCF} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{1+k^{FCF}}{1+r} \cdot q$$

Im Ergebnis bleibt auch an dieser Stelle festzuhalten, dass die Verbundbewertung von Total Cash Flows mit erwarteten Free Cash Flows als Maßstab der Wertermittlung zu der Standard-Bewertungsformel des WACC-Ansatzes führt.²¹ Für das hier betrachtete Zahlenbeispiel mit Planungshorizont $T = 3$ erhält man nach (3) einen Gesamtkapitalmarktwert in Höhe von:

$$\begin{aligned} V_0^{TCF} &= \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_1]}{1+WACC^{FCF}} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2]}{(1+WACC^{FCF})^2} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]}{(1+WACC^{FCF})^3} = \frac{1000}{1,09287619} + \frac{1000}{1,09287619^2} + \frac{1000}{1,09287619^3} \\ &= \mathbf{915,0167317} + \mathbf{837,2556193} + \mathbf{766,1029004} = 2518,37525154 \end{aligned}$$

$$WACC^{FCF} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{1+0,10}{1+0,05} \cdot 0,40 = 0,09287619$$

3.1.2.4 APV-Verbund-Bewertungsansatz

Nach dem APV-Ansatz ergibt sich der als Marktwert künftiger Total Cash Flows $TCF = (T\tilde{C}F_1, T\tilde{C}F_2, \dots, T\tilde{C}F_T)$ definierte Marktwert des Gesamtkapitals als Marktwert künftiger Free Cash Flows $FCF = (F\tilde{C}F_1, F\tilde{C}F_2, \dots, F\tilde{C}F_T)$ zuzüglich des Marktwertes künftiger Tax Shields $TS = (T\tilde{S}_1, T\tilde{S}_2, \dots, T\tilde{S}_T)$. Die Kapitalkosten bei vollständiger Eigenfinanzierung sind annahmegemäß vorgegeben und zudem im Zeitablauf konstant, das heißt $k_t^{FCF} = k^{FCF}$, $t = 1, \dots, T$. Der Marktwert des Gesamtkapitals ergibt sich dann in der Schreibweise des APV-Verbund-Bewertungsansatzes zu:

²⁰ Vgl. die Ableitung in Anhang IV.

²¹ Vgl. zu der Standard-Bewertungsformel des WACC-Ansatzes bei unterstellter wertorientierter Finanzierung Steiner/Wallmeier (1999), S. 5, Gleichung (10) i.V.m. Gleichung (9), S. 4; Wallmeier (1999), S. 1477, Tabelle 2, Gleichung (4a) i.V.m. Gleichung (2a-1); sowie Kruschwitz/Löffler (2003), S. 60, Theorem 2.9 i.V.m. Theorem 2.10.

$$(1) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FCF} + V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{T}S_t]}{\prod_{s=1}^t (1+k_t^{TS})}, \quad k_t^{TS} = \frac{E_0[\tilde{T}S_t] + E_0[\tilde{V}_t^{TS}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]} - 1$$

Die in der Bestimmungsgleichung von k_t^{TS} stehenden Ausdrücke $E_0[\tilde{V}_t^{TS}]$ und $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]$ beschreiben die im Bewertungszeitpunkt 0 für die Zeitpunkte t und $t-1$ erwarteten Marktwerte der Tax Shields aller Folgeperioden. Diese Marktwertenerwartungen sind nach Miles/Ezzell gegeben durch:

$$(2a) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}] = \sum_{s=t}^T \frac{E_0[\tilde{T}S_s]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{s-t}} \quad (2b) \quad E_0[\tilde{V}_t^{TS}] = \sum_{s=t+1}^T \frac{E_0[\tilde{T}S_s]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{s-t-1}}$$

Werden die gemäß (2a) und (2b) definierten Ausdrücke in die Bestimmungsgleichungen von k_t^{TS} , $t=1, \dots, T$ eingesetzt, dann können die aus der Verbundbewertung der Tax Shields resultierenden Kalkulationszinssätze durch geeignete Umformungen folgendermaßen präzisiert werden:²²

$$(3a) \quad k_t^{TS} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]}, \quad t=1, \dots, T$$

oder alternativ hierzu als Zuschlag zum risikolosen Zinssatz r :

$$(3b) \quad k_t^{TS} = r + \frac{k^{FCF} - r}{1+k^{FCF}} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_t^{TS}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]}, \quad t=1, \dots, T$$

und nicht zuletzt in der Darstellung des Konzepts der gewogenen durchschnittlichen Kapitalkosten:

$$(3c) \quad k_t^{TS} = k^{TCF} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]} - k^{FCF} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]}, \quad t=1, \dots, T$$

$$k_t^{TCF} = k^{TCF} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot q, \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}] - E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF}]$$

Die aus der Verbundbewertung von Tax Shields abgeleitete Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes V_0^{TCF} lautet in der Darstellung von (3a):

$$(4) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FCF} + V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{T}S_t]}{\prod_{s=1}^t (1+k_s^{TS})}, \quad k_t^{TS} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS}]}$$

Im Ergebnis bleibt festzuhalten, dass die Verbundbewertung von Tax Shields zu einer neuen Bewertungsformel für den Gesamtkapitalmarktwert einer verschuldeten Unternehmung führt. Für das hier betrachtete Zahlenbeispiel mit Planungshorizont $T=3$ erhält man nach (4) einen Gesamtkapitalmarktwert in Höhe von:

$$\begin{aligned} V_0^{TCF} &= \left(\frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_1]}{1+k^{FCF}} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2]}{(1+k^{FCF})^2} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]}{(1+k^{FCF})^3} \right) + \left(\frac{E_0[\tilde{T}S_1]}{1+k_1^{TS}} + \frac{E_0[\tilde{T}S_2]}{(1+k_2^{TS}) \cdot (1+k_1^{TS})} + \frac{E_0[\tilde{T}S_3]}{(1+k_3^{TS}) \cdot (1+k_2^{TS}) \cdot (1+k_1^{TS})} \right) \\ &= \left(\frac{1000}{1,10} + \frac{1000}{1,10^2} + \frac{1000}{1,10^3} \right) + \left(\frac{17,12495171}{1,07413104} + \frac{11,91545199}{1,06609519 \cdot 1,07413104} + \frac{6,22211378}{1,05 \cdot 1,06609519 \cdot 1,07413104} \right) \\ &= 2486,85199098 + 31,52326055 = \mathbf{2518,37525154} \end{aligned}$$

²² Vgl. zur Ableitung von (3a), (3b) und (3c) Anhang V.

$$k_1^{TS} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{0,10 - 0,05}{1 + 0,05} \cdot \frac{1007,35010061}{31,52326055} = 0,07413104$$

$$k_2^{TS} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{0,10 - 0,05}{1 + 0,05} \cdot \frac{700,90894044}{16,73516101} = 0,06609519$$

$$k_3^{TS} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{0,10 - 0,05}{1 + 0,05} \cdot \frac{366,00669269}{5,92582264} = 0,05$$

Die nach dem APV-Verbund-Bewertungsansatz kalkulierten (*Bar*-)Wertbeiträge der periodischen Cash Flows zum Gesamtkapitalmarktwert sind gleich:

$$V_0^{TCF} = \left(\frac{E_0[\tilde{FCF}_1]}{1 + k^{FCF}} + \frac{E_0[\tilde{TS}_1]}{1 + k_1^{TS}} \right) + \left(\frac{E_0[\tilde{FCF}_2]}{(1 + k^{FCF})^2} + \frac{E_0[\tilde{TS}_2]}{(1 + k_2^{TS}) \cdot (1 + k_1^{TS})} \right) + \left(\frac{E_0[\tilde{FCF}_3]}{(1 + k^{FCF})^3} + \frac{E_0[\tilde{TS}_3]}{(1 + k_3^{TS})(1 + k_2^{TS})(1 + k_1^{TS})} \right)$$

$$= \left(\frac{1000}{1,10} + \frac{17,12495171}{1,07413104} \right) + \left(\frac{1000}{1,10^2} + \frac{11,91545199}{1,06609519 \cdot 1,07413104} \right) + \left(\frac{1000}{1,10^3} + \frac{6,22211378}{1,05 \cdot 1,06609519 \cdot 1,07413104} \right)$$

$$= \mathbf{925,0339847} + \mathbf{836,8516443} + \mathbf{756,4896270} = 2518,37525154$$

Abbildung 4 zeigt die zeitliche Entwicklung der bedingten erwarteten Renditen des Tax Shield-Prozesses. Es ist augenscheinlich, dass die Verbundbewertung von Tax Shields im Modell der Kapitalisierung einer endlichen Zahlungsreihe durch im Zeitablauf variable, aber nicht stochastische Diskontierungszinssätze charakterisiert ist. Die Nicht-Stochastizität der bedingten erwarteten Renditen des Tax Shield-Prozesses kann unter den Bedingungen des hier unterstellten multiplikativen Free Cash Flow-Prozesses auch für den allgemeinen Fall aufgezeigt werden.^{2,3}

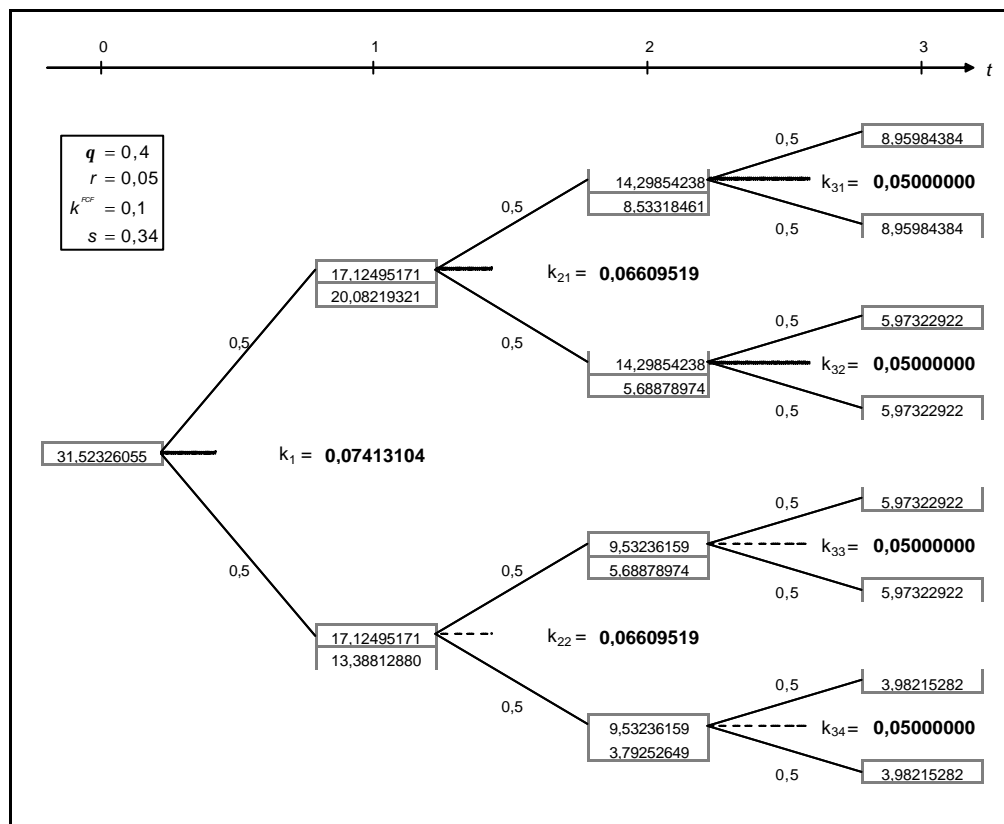


Abb. 4: Bedingte erwartete Renditen des Tax Shield-Prozesses

3.2 Einzelbewertung von Cash Flows

3.2.1 Bewertungsmethodik

Dieses Bewertungsprinzip wird grundsätzlich dadurch charakterisiert, dass der bewertungsrelevante mehrperiodige Zahlungsstrom aus riskanten Cash Flows $CF = (\tilde{C}F_1, \tilde{C}F_2, \dots, \tilde{C}F_T)$ in zeitlich-vertikaler Richtung aufgespalten wird, und jeder einzelne Cash Flow eine von den übrigen Cash Flows des Zahlungsstroms losgelöste und separate Bewertung erfährt. Bei wertadditiver Marktbewertungsfunktion gilt der bekannte Zusammenhang: Wird ein mehrperiodiger Zahlungsstrom in seine Einzelzahlungen zerlegt, dann ist der Marktwert des Zahlungsstroms gleich der Summe der Marktwerte der Einzelzahlungen. Der Marktwert jeder Einzelzahlung wird dabei unter den hier getroffenen Annahmen des Standard-DCF-Modells als der mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte Barwert der erwarteten Einzelzahlung bestimmt:

$$(1) \quad V_0^{CF_t} = \frac{E_0[\tilde{C}F_t]}{\prod_{t=1}^t (1 + k_t^{CF_t})}, \quad t = 1, \dots, T$$

$V_0^{CF_t}$ bezeichnet den auf den Bewertungszeitpunkt 0 bezogenen Marktwert des in der Periode t anfallenden Cash Flow $\tilde{C}F_t$, $E_0[\tilde{C}F_t]$ den in 0 gebildeten Erwartungswert von $\tilde{C}F_t$ und $k_t^{CF_t}$, $t = 1, \dots, t$ den bewertungsrelevanten Satz von Kalkulationszinssätzen. Die Ableitung der periodenspezifischen (Index t) und Cash Flow-spezifischen (Index t) Kalkulationszinssätze $k_t^{CF_t}$, $t = 1, \dots, t$, erfolgt auf der Basis der im Bewertungszeitpunkt 0 erwarteten Marktwertentwicklung von $\tilde{C}F_t$:

$$(2a) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF_t}] = \frac{E_0[\tilde{C}F_t]}{1 + k_t^{CF_t}} \Rightarrow k_t^{CF_t} = \frac{E_0[\tilde{C}F_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF_t}]} - 1, \quad (t = t)$$

$$(2b) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF_t}] = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{CF_t}]}{1 + k_t^{CF_t}} \Rightarrow k_t^{CF_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{CF_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF_t}]} - 1, \quad t = 1, \dots, t-1$$

Der Ausdruck $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF_t}]$ beschreibt den im Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt $t-1$ erwarteten Marktwert von $\tilde{C}F_t$. Die Ausdrücke $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF_t}]$ und $E_0[\tilde{V}_t^{CF_t}]$ hingegen beschreiben die im Zeitpunkt 0 erwarteten Marktwerte von $\tilde{C}F_t$ aller früheren Zeitpunkte.

Der aus der Einzelbewertung von Cash Flows resultierende Marktwert des Zahlungsstroms $CF = (\tilde{C}F_1, \tilde{C}F_2, \dots, \tilde{C}F_T)$ ergibt sich unter Berücksichtigung von (1) und (2) zu:

$$(3) \quad V_0^{CF} = \sum_{t=1}^T V_0^{CF_t} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{C}F_t]}{\prod_{t=1}^t (1 + k_t^{CF_t})}$$

$$k_t^{CF_t} = \frac{E_0[\tilde{C}F_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF_t}]} - 1, \quad k_t^{CF_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{CF_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{CF_t}]} - 1, \quad t = 1, \dots, t-1$$

Die in dieser Bewertungsformel stehenden periodenbezogenen Summanden geben jenen Wert der periodenbezogenen Cash Flows $\tilde{C}F_t$ an, der ihnen bei wertadditiver Marktbewertung zukommen würde. Wollten die Eigenkapitalgeber den Cash Flow der Periode t , $\tilde{C}F_t$, im Bewertungszeitpunkt 0 abtreten, so würden sie dafür den Preis $E_0[\tilde{C}F_t] / \prod_{t=1}^t (1 + k_t^{CF_t})$ verlangen.²⁴ Hiermit einhergehend kann man unmittelbar erkennen, wie sich der Marktwert des Zahlungsstroms $CF = (\tilde{C}F_1, \tilde{C}F_2, \dots, \tilde{C}F_T)$ verändert, wenn sich ein erwarteter Cash Flow in seiner Höhe verändert oder gar zur Gänze wegfällt.

²³ Vgl. hierzu Anhang VI.

²⁴ Vgl. auch Steiner/Wallmeier (1999), S. 4 im Zusammenhang mit der Interpretationsfähigkeit der von dem TCF-Ansatz induzierten Barwertbeiträge einzelner Total Cash Flows zum Gesamtkapitalmarktwert.

3.2.2 Bewertungsgleichungen

3.2.2.1 APV-Einzel-Bewertungsansatz

Die von Miles/Ezzell (1980) (1985) entwickelte Bewertungsformel für den Marktwert des Gesamtkapitals einer verschuldeten Unternehmung impliziert grundsätzlich eine Einzelbewertung von Cash Flows. Dieser Zusammenhang wird evident, wenn man ihre Bewertungsformel,

$$(1) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FCF} + V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_t]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}}$$

in allgemeiner Darstellung gemäß Gleichung (3) formuliert:

$$(2) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FCF} + V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T V_0^{FCF_t} + \sum_{t=1}^T V_0^{TS_t} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_t]}{\prod_{\tau=1}^t (1+k_t^{TS_\tau})}$$

$$k_t^{TS_t} = \frac{E_0[\tilde{TS}_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS_t}]} - 1 = r, \quad k_t^{TS_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{TS_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS_t}]} - 1 = k^{FCF}, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$V_0^{FCF_t}$ und $V_0^{TS_t}$ bezeichnen die auf den Bewertungszeitpunkt 0 bezogenen Marktwerte von \tilde{FCF}_t und \tilde{TS}_t . Die erwarteten Free Cash Flows werden über alle Perioden mit dem im Zeitablauf als konstant angenommenen Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung k^{FCF} diskontiert. Die erwarteten Tax Shields hingegen werden mit periodenspezifischen Kalkulationszinssätzen diskontiert. Die im Wege der Marktwertbestimmung einzelner Tax Shields zur Anwendung kommenden Kalkulationszinssätze variieren dabei nicht nur über verschiedene Perioden, sondern auch über verschiedene Tax Shields hinweg: Der für den Zeitpunkt t erwartete Tax Shield $E_0[\tilde{TS}_t]$ wird über die Periode t mit $k_t^{TS_t} = r$ und über alle vorangehenden Perioden $t = 1, \dots, t-1$ mit $k_t^{TS_t} = k^{FCF}$ diskontiert. Der für den Zeitpunkt $t+1$ erwartete Tax shield $E_0[\tilde{TS}_{t+1}]$ hingegen wird über die Periode $t+1$ mit $k_{t+1}^{TS_{t+1}} = r$ und über alle vorangehenden Perioden $t = 1, \dots, t$ mit $k_t^{TS_{t+1}} = k^{FCF}$ diskontiert. Während der für den Zeitpunkt t erwartete Tax Shield $E_0[\tilde{TS}_t]$ über die Periode t mit dem risikolosen Zinssatz r diskontiert wird, wird der für den Zeitpunkt $t+1$ erwartete Tax Shield $E_0[\tilde{TS}_{t+1}]$ über die Periode t mit dem Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung k^{FCF} diskontiert. Dieses Auseinanderfallen der periodenbezogenen Kalkulationszinssätze über verschiedene Cash Flows hinweg ist charakteristisch für das Prinzip der Einzelbewertung von Cash Flows. Im Gegensatz hierzu vermögen die bei Verbundbewertung von Cash Flows zur Anwendung kommenden Kalkulationszinssätze zwar auch über verschiedene Perioden hinweg zu variieren – so zum Beispiel bei der Verbundbewertung von Tax Shields im APV-Ansatz – nicht hingegen über verschiedene Cash Flows.

Die nach dem APV-Einzel-Bewertungsansatz kalkulierten (*Markt*-)Wertbeiträge der periodischen Cash Flows zum Gesamtkapitalmarktwert sind gleich:

$$\begin{aligned} V_0^{TCF} &= \left(\frac{E_0[\tilde{FCF}_1]}{1+k^{FCF}} + \frac{E_0[\tilde{TS}_1]}{1+r} \right) + \left(\frac{E_0[\tilde{FCF}_2]}{(1+k^{FCF})^2} + \frac{E_0[\tilde{TS}_2]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})} \right) + \left(\frac{E_0[\tilde{FCF}_3]}{(1+k^{FCF})^3} + \frac{E_0[\tilde{TS}_3]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^2} \right) \\ &= \left(\frac{1000}{1,10} + \frac{17,12495171}{1,05} \right) + \left(\frac{1000}{1,10^2} + \frac{11,91545199}{1,05 \cdot 1,10} \right) + \left(\frac{1000}{1,10^3} + \frac{6,22211378}{1,05 \cdot 1,10^2} \right) \\ &= \mathbf{925,4003801} + \mathbf{836,76268964} + \mathbf{756,21217499} = 2518,37525154 \end{aligned}$$

Die nachstehende Abbildung illustriert die zeitliche Struktur der bedingten erwarteten Renditen im Miles/Ezzell-Modell am Beispiel des Tax Shields der Periode 3.

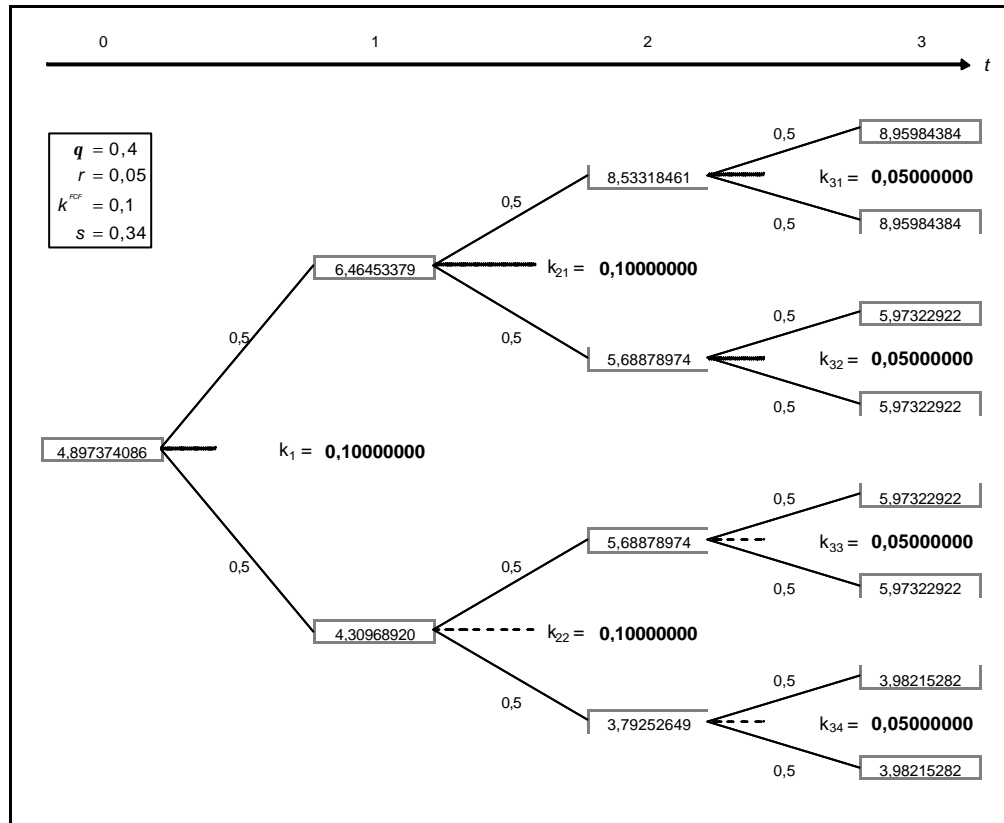


Abb. 5: Bedingte erwartete Renditen der Marktwertentwicklung von $\tilde{T}S_3$

Der in jedem Knotenpunkt von $t=1,2$ im Kästchen angeführte Wert beschreibt den unter dem Informationsstand des jeweiligen 'Knotenpunktes' bedingten Marktwert des Tax Shield der Periode 3. Es ist augenscheinlich, dass der APV-Einzel-Bewertungsansatz durch im Zeitablauf variable, aber nicht stochastische Diskontierungszinssätze charakterisiert wird.

3.2.2.2 FTE-Einzel-Bewertungsansatz

Die aus der Einzelbewertung von Flows to Equity und Flows to Debt resultierende Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes lautet:

$$(1) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FTE} + V_0^{FTD} = \sum_{t=1}^T V_0^{FTE_t} + \sum_{t=1}^T V_0^{FTD_t} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{T}E_t]}{\prod_{i=1}^t (1+k_t^{FTE_i})} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{T}D_t]}{\prod_{i=1}^t (1+k_t^{FTD_i})}$$

$$k_t^{FTE_t} = \frac{E_0[F\tilde{T}E_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]} - 1 \quad \text{und} \quad k_t^{FTE_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{FTE_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]} - 1, \quad t = 1, \dots, t-1$$

$$k_t^{FTD_t} = \frac{E_0[F\tilde{T}D_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]} - 1 \quad \text{und} \quad k_t^{FTD_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{FTD_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]} - 1, \quad t = 1, \dots, t-1$$

Die den Bestimmungsgleichungen von $k_t^{FTE_t}$, $t = 1, \dots, t$ und $k_t^{FTD_t}$, $t = 1, \dots, t$ zugrunde liegenden Ausdrücke $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]$, $t = 1, \dots, t$ und $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]$, $t = 1, \dots, t$ beschreiben die im Bewertungszeitpunkt 0 für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, t$ erwarteten Marktwerte von $F\tilde{T}E_t$ und $F\tilde{T}D_t$. Diese Marktwarterwartungen können unter Berücksichtigung der im Cash Flow-Schema bestehenden Beziehungen zwischen den in die Bewertung involvierten Cash Flow-Größen und der nach Miles/Ezzell geltenden Marktwertbestimmungsgleichungen für

die einzelnen Cash Flow-Positionen spezifiziert werden. Die von dem FTE-Einzel-Bewertungsansatz verwendeten Diskontierungszinssätze lassen sich mit Hilfe dieser Ergebnisse wie folgt präzisieren:²⁵

Flow to Equity-Kalkulationszinssätze

$$(2a) \quad k_t^{FTE_t} = \frac{E_0[F\tilde{T}E_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]} - 1 = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]}$$

$$(2b) \quad k_t^{FTE_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{FTE_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]} - 1 = k^{FCF}, \quad t = 1, \dots, t-1$$

Flow to Debt-Kalkulationszinssätze

$$(2c) \quad k_t^{FTD_t} = \frac{E_0[F\tilde{T}D_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]} - 1 = k^{FCF} - (k^{FCF} - r) \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]}$$

$$(2d) \quad k_t^{FTD_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{FTD_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]} - 1 = k^{FCF}, \quad t = 1, \dots, t-1$$

Die aus der Einzelbewertung von Flows to Equity und Flows to Debt abgeleitete Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes V_0^{TCF} ergibt sich in weiterer Folge zu:

$$(3) \quad V_0^{TCF} = V_0^{FTE} + V_0^{FTD} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{T}E_t]}{(1+k_t^{FTE_t}) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}} + \sum_{t=1}^T \frac{E_0[F\tilde{T}D_t]}{(1+k_t^{FTD_t}) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}}$$

$$k_t^{FTE_t} = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]}$$

$$k_t^{FTD_t} = k^{FCF} - (k^{FCF} - r) \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]}, \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}] \cdot (1-q)$$

Im Ergebnis bleibt festzuhalten, dass die Einzelbewertung von Flows to Equity und Flows to Debt jeweils zu einer Bewertungsformel für den Eigenkapital- und Fremdkapitalmarktwert führt, die in ihrer Struktur der von Miles/Ezzell entwickelten Formel entspricht: Die erwarteten Flows to Equity $E_0[F\tilde{T}E_t]$, $t = 1, \dots, T$ und Flows to Debt $E_0[F\tilde{T}D_t]$, $t = 1, \dots, T$ werden über die Periode t mit den Cash Flow-spezifischen Kalkulationszinssätzen $k_t^{FTE_t}$ und $k_t^{FTD_t}$ und über alle vorangehenden Perioden $t = 1, \dots, t-1$ mit dem Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung k^{FCF} diskontiert. Der FTE-Einzel-Bewertungsansatz wird dabei vollkommen analog zum APV-Einzel-Bewertungsansatz durch im Zeitablauf variable, aber nicht stochastische Diskontierungszinssätze charakterisiert. Für das hier betrachtete Beispiel mit Planungshorizont $T = 3$ erhält man nach (3) einen Eigenkapitalmarktwert V_0^{FTE} in Höhe von:

$$\begin{aligned} V_0^{FTE} &= \frac{E_0[F\tilde{T}E_1]}{1+k_1^{FTE_1}} + \frac{E_0[F\tilde{T}E_2]}{(1+k_2^{FTE_2}) \cdot (1+k^{FCF})} + \frac{E_0[F\tilde{T}E_3]}{(1+k_3^{FTE_3}) \cdot (1+k^{FCF})^2} \\ &= \frac{660,31628650}{1,189244309} + \frac{641,96775722}{1,162430438 \cdot 1,10} + \frac{621,91508645}{1,13279365 \cdot 1,10^2} \\ &= 555,2402324 + 502,0576138 + 453,727305 = \mathbf{1511,0251392} \end{aligned}$$

²⁵ Vgl. die Ableitungen in Anhang VII.

$$k_1^{FTE_1} = 0,10 + (0,10 - 0,05) \cdot \frac{1 + 0,05 \cdot (1 - 0,34)}{1 + 0,05} \cdot \frac{1007,35010061}{925,40038691 \cdot 0,60} = 0,18924431$$

$$k_2^{FTE_2} = 0,10 + (0,10 - 0,05) \cdot \frac{1 + 0,05 \cdot (1 - 0,34)}{1 + 0,05} \cdot \frac{700,90894044}{920,43895860 \cdot 0,60} = 0,16243044$$

$$k_3^{FTE_3} = 0,10 + (0,10 - 0,05) \cdot \frac{1 + 0,05 \cdot (1 - 0,34)}{1 + 0,05} \cdot \frac{366,00669269}{915,01673173 \cdot 0,60} = 0,13279365$$

Der Fremdkapitalmarktwert V_0^{FTD} ist gleich:

$$\begin{aligned} V_0^{FTD} &= \frac{E_0[F\tilde{T}D_1]}{1 + k_1^{FTD_1}} + \frac{E_0[F\tilde{T}D_2]}{(1 + k_2^{FTD_2}) \cdot (1 + k^{FCF})} + \frac{E_0[F\tilde{T}D_3]}{(1 + k_3^{FTD_3}) \cdot (1 + k^{FCF})^2} \\ &= \frac{356,80866521}{0,96393051} + \frac{369,94769476}{1,00481322 \cdot 1,10} + \frac{384,30702733}{1,05 \cdot 1,10^2} \\ &= 370,1601531 + 334,7050769 + 302,48487 = \mathbf{1007,35010061} \end{aligned}$$

$$k_1^{FTD_1} = 0,10 - (0,10 - 0,05) \cdot \frac{2518,37525154}{925,4003869} = -0,03606949$$

$$k_2^{FTD_2} = 0,10 - (0,10 - 0,05) \cdot \frac{1752,27235109}{920,4389586} = 0,00481322$$

$$k_3^{FTD_3} = 0,10 - (0,10 - 0,05) \cdot \frac{915,01673173}{915,0167317} = 0,05$$

Die nach dem FTE-Einzel-Bewertungsansatz kalkulierten (Markt-)Wertbeiträge der periodischen Cash Flows zum Gesamtkapitalmarktwert ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} V_0^{FTE} = V_0^{TCF} &= \sum_{t=1}^T \left(\frac{E_0[F\tilde{T}E_t]}{(1 + k_t^{FTE_t}) \cdot (1 + k^{FCF})^{t-1}} + \frac{E_0[F\tilde{T}D_t]}{(1 + k_t^{FTD_t}) \cdot (1 + k^{FCF})^{t-1}} \right) \\ &= \left(555,2402324 + 370,1601531 \right) + \left(502,0576138 + 334,7050769 \right) + \left(453,727305 + 302,48487 \right) \\ &= \mathbf{925,4003855} + \mathbf{836,7626907} + \mathbf{756,212175} = 2518,37525154 \end{aligned}$$

3.2.2.3 TCF-Einzel-Bewertungsansatz

Die aus der Einzelbewertung von Total Cash Flows resultierende Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes lautet:

$$(1) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T V_0^{TCF_t} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{TCF}_t]}{\prod_{i=1}^t (1 + k_i^{TCF_i})}$$

$$k_t^{TCF_t} = \frac{E_0[\tilde{TCF}_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} - 1, \quad k_t^{TCF_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{TCF_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} - 1, \quad t = 1, \dots, t-1$$

Die in dieser Gleichung stehenden Marktwertenerwartungen $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]$, $t = 1, \dots, t$ sind nach Miles/Ezzell-Modells wie folgt bestimmt:

$$(2) \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}] = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t]}{(1 + k^{FCF})^{t-t+1}} + \frac{E_0[\tilde{T}S_t]}{(1 + r) \cdot (1 + k^{FCF})^{t-t}}, \quad t = 1, \dots, t$$

Werden die gemäß (2) definierten Ausdrücke in die Bestimmungsgleichungen von $k_t^{TCF_t}$ und $k_t^{TCF_t}$, $t=1, \dots, t-1$ eingesetzt, dann lassen sich die von dem TCF-Einzel-Bewertungsansatz verwendeten Diskontierungszinssätze wie folgt präzisieren:²⁶

$$(3a) \quad k_t^{TCF_t} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]}$$

$$(3b) \quad k_t^{TCF_t} = k^{FCF}, \quad t=1, \dots, t-1$$

Der nach (3a) definierte Kalkulationszinssatz für die Periode t kann auch in der Darstellung des Konzepts der gewogenen durchschnittlichen Kapitalkosten formuliert werden:

$$(4a) \quad k_t^{TCF_t} = k^{FCF} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} + r \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]}, \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FCF_t}] + E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TS_t}]$$

beziehungsweise in der bekannten Standardschreibweise:

$$(4b) \quad k_t^{TCF_t} = k_t^{FTE_t} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} + k_t^{FTD_t} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} = k_t^{FTE_t} \cdot (1-q) + k_t^{FTD_t} \cdot q$$

$$E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}] = E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}] + E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]$$

$$k_t^{FTE_t} = k^{FCF} + (k^{FCF} - r) \cdot \frac{1+r \cdot (1-s)}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}]}$$

$$k_t^{FTD_t} = k^{FCF} - (k^{FCF} - r) \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]}$$

$$E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTE_t}] / E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}] = 1 - q, \quad E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}] / E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}] = q$$

Die aus der Einzelbewertung von Total Cash Flows abgeleitete Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes V_0^{TCF} lautet unter Zugrundelegung von (3a):

$$(5) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T V_0^{TCF_t} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{TCF}_t]}{(1+k_t^{TCF_t}) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}}, \quad k_t^{TCF_t} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]}$$

Im Ergebnis bleibt festzuhalten, dass die Einzelbewertung von Total Cash Flows ebenso wie die Einzelbewertung von Flows to Equity und Flows to Debt zu einer Bewertungsformel für den Gesamtkapitalmarktwert einer verschuldeten Unternehmung führt, die in ihrer Struktur der von Miles/Ezzell entwickelten Formel entspricht: Die erwarteten Total Cash Flows $E_0[\tilde{TCF}_t]$, $t=1, \dots, T$ werden über die Periode t mit dem Cash Flow-spezifischen Kalkulationszinssatz $k_t^{TCF_t}$ und über alle vorangehenden Perioden $t=1, \dots, t-1$ mit dem Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung k^{FCF} diskontiert. Der TCF-Prozess wird dabei durch deterministische bedingte erwartete Renditen charakterisiert. Für das hier betrachtete Zahlenbeispiel mit Planungshorizont $T=3$ erhält man nach (5) einen Gesamtkapitalmarktwert in Höhe von:²⁷

²⁶ Vgl. die Ableitungen in Anhang VIII.

²⁷ Der in Bezug auf $E_0[\tilde{TCF}_3]$ in der Periode 3 zur Anwendung kommende Diskontierungszinssatz $k_3^{TCF_3}$ ist wegen $E_0[\tilde{V}_{T-1}^{TCF_T}] = E_0[\tilde{V}_{T-1}^{TCF}] = E_0[\tilde{V}_{T-1}^{FTD}] / q$ gleich k^{TCF} :

$$k_T^{TCF_T} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{T-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{T-1}^{TCF_T}]} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{k^{FCF} - r}{1+r} \cdot q = k^{TCF}$$

$$\begin{aligned}
V_0^{TCF} &= \frac{E_0[\tilde{TCF}_1]}{(1+k_1^{TCF_1})} + \frac{E_0[\tilde{TCF}_2]}{(1+k_2^{TCF_2}) \cdot (1+k^{FCF})} + \frac{E_0[\tilde{TCF}_3]}{(1+k_3^{TCF_3}) \cdot (1+k^{FCF})^2} \\
&= \frac{1017,12495171}{1,09911879} + \frac{1011,91545199}{1,09938355 \cdot 1,10} + \frac{1006,22211378}{1,09967619 \cdot 1,10^2} \\
&= \mathbf{925,40038691} + \mathbf{836,76268964} + \mathbf{756,21217499} = 2518,37525154
\end{aligned}$$

$$k_1^{TCF_1} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{0,10 - 0,05}{1 + 0,05} \cdot \frac{1007,35010061}{925,40038691} = 0,09911879$$

$$k_2^{TCF_2} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{0,10 - 0,05}{1 + 0,05} \cdot \frac{700,90894044}{920,43895860} = 0,09938355$$

$$k_3^{TCF_3} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{0,10 - 0,05}{1 + 0,05} \cdot \frac{366,00669269}{915,01673173} = 0,09967619$$

3.2.2.4 WACC-Einzel-Bewertungsansatz

Bewertungsobjekt ist ein mehrperiodiger Zahlungsstrom aus riskanten Total Cash Flows $TCF = (\tilde{TCF}_1, \tilde{TCF}_2, \dots, \tilde{TCF}_T)$. Gesucht ist der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert von TCF , namentlich der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert des Gesamtkapitals. Maßstab der Wertermittlung im WACC-Ansatz ist nicht der periodenbezogene Total Cash Flow, sondern der periodenbezogene Free Cash Flow. Die aus der Einzelbewertung von Total Cash Flows resultierende Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes ergibt sich dann in der Schreibweise des WACC-Ansatzes zu:

$$(1) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T V_0^{TCF_t} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{\prod_{i=1}^t (1+WACC_i^{FCF_i})}$$

$$WACC_t^{FCF_t} = \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} - 1, \quad WACC_t^{FCF_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{TCF_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} - 1, \quad t = 1, \dots, t-1$$

Die periodenbezogenen Kalkulationszinssätze $WACC_t^{FCF_t}$ und $WACC_t^{FCF_t}$ lassen sich vollkommen analog zu den entsprechenden Ableitungen im TCF-Einzel-Bewertungsansatz unter Verwendung der nach Miles/Ezzell definierten Bestimmungsgleichungen von $E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]$, $t = 1, \dots, t$ wie folgt präzisieren:²⁸

$$(2a) \quad WACC_t^{FCF_t} = \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} - 1 = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{1+k^{FCF}}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]}$$

$$(2b) \quad WACC_t^{FCF_t} = \frac{E_0[\tilde{V}_t^{TCF_t}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]} - 1 = k^{FCF}, \quad t = 1, \dots, t-1$$

Die aus der Einzelbewertung von Total Cash Flows abgeleitete Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes V_0^{TCF} in der Schreibweise des WACC-Ansatzes ergibt sich in weiterer Folge zu:

$$(3) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T V_0^{TCF_t} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+WACC_t^{FCF_t}) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}}, \quad WACC_t^{FCF_t} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{1+k^{FCF}}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{t-1}^{TCF_t}]}$$

Die erwarteten Free Cash Flows $E_0[\tilde{FCF}_t]$, $t = 1, \dots, T$ werden über die Periode t mit dem Cash Flow-spezifischen Kalkulationszinssatz $WACC_t^{FCF_t}$ und über alle vorangehenden Perioden $t = 1, \dots, t-1$ mit dem Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung k^{FCF} diskontiert. Die aus diesem Ansatz

²⁸ Vgl. die Ableitungen in Anhang IX.

resultierenden bedingten erwarteten Renditen sind ebenfalls deterministisch. Für das hier betrachtete Beispiel mit Planungshorizont $T = 3$ ergibt sich der gemäß (3) definierte Gesamtkapitalmarktwert V_0^{TCF} zu:²⁹

$$\begin{aligned} V_0^{TCF} &= \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_1]}{(1+WACC_1^{FCF_1})} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2]}{(1+WACC_2^{FCF_2}) \cdot (1+k^{FCF})} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]}{(1+WACC_3^{FCF_3}) \cdot (1+k^{FCF})^2} \\ &= \frac{1000}{1,08061334} + \frac{1000}{1,08643815 \cdot 1,10} + \frac{1000}{1,09287619 \cdot 1,10^2} \\ &= \mathbf{925,40038691} + \mathbf{836,76268964} + \mathbf{756,21217499} = 2518,37525154 \end{aligned}$$

$$WACC_1^{FCF_1} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{1+0,10}{1+0,05} \cdot \frac{1007,35010061}{925,40038691} = 0,08061334$$

$$WACC_2^{FCF_2} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{1+0,10}{1+0,05} \cdot \frac{700,90894044}{920,43895860} = 0,08643815$$

$$WACC_3^{FCF_3} = 0,10 - 0,05 \cdot 0,34 \cdot \frac{1+0,10}{1+0,05} \cdot \frac{366,00669269}{915,01673173} = 0,09287619$$

4. Tax Shield-abhängige Dekomposition von Total Cash Flows

Mit den in Kapitel 3 herausgearbeiteten Ergebnissen betreffend die Verbund- und Einzelbewertung von Cash Flows lässt sich nicht zuletzt auch das in dem Eingangszitat von Steiner/Wallmeier (1999) implizit angesprochene Cash Flow-Dekompositionsprinzip anschaulich darlegen. Dieses Dekompositionsprinzip folgt dem mehr ökonomischen Grundsatz, dass im DCF-Modell mit unterstellter wertorientierter Finanzierung die künftigen Tax Shields nicht modellexogene, sondern modellendogene Variable sind und in letzter Konsequenz von den künftigen Free Cash Flows der Unternehmung bestimmt werden. Jeder einzelne periodenbezogene riskante Free Cash Flow $\tilde{F}\tilde{C}F_t$ generiert dabei einen eigenen t -periodigen Zahlungsstrom aus riskanten Tax Shields $TS^{FCF_t} = (TS_1^{FCF_t}, \dots, \tilde{TS}_t^{FCF_t})$, woraus prinzipiell ein t -periodiger Zahlungsstrom aus riskanten Total Cash Flows der folgenden Form resultiert: $TCF^{FCF_t} = (TS_1^{FCF_t}, \dots, \tilde{TS}_t^{FCF_t} + \tilde{F}\tilde{C}F_t)$. Das in diesem Abschnitt diskutierte Cash Flow-Dekompositionsprinzip lässt sich dann wie folgt illustrieren:

$$\begin{aligned} TCF &= (T\tilde{C}F_1, T\tilde{C}F_2, T\tilde{C}F_3, \dots, T\tilde{C}F_T) = \left(TCF^{FCF_1}; TCF^{FCF_2}; TCF^{FCF_3}; \dots; TCF^{FCF_T} \right) \\ &= \left((TS_1^{FCF_1} + \tilde{F}\tilde{C}F_1); \right. \\ &\quad (TS_1^{FCF_2}, \tilde{TS}_2^{FCF_2} + \tilde{F}\tilde{C}F_2); \\ &\quad (TS_1^{FCF_3}, \tilde{TS}_2^{FCF_3}, \tilde{TS}_3^{FCF_3} + \tilde{F}\tilde{C}F_3); \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. (TS_1^{FCF_T}, \tilde{TS}_2^{FCF_T}, \tilde{TS}_3^{FCF_T}, \dots, \tilde{TS}_T^{FCF_T} + \tilde{F}\tilde{C}F_T) \right) \end{aligned}$$

²⁹ Der in Bezug auf $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]$ in der Periode 3 zur Anwendung kommende Diskontierungszinssatz $WACC_3^{FCF_3}$ ist wegen $E_0[\tilde{V}_{T-1}^{TCF}] = E_0[\tilde{V}_{T-1}^{FCF}] = E_0[\tilde{V}_{T-1}^{FTD}]/\mathbf{q}$ gleich $WACC^{FCF}$:

$$WACC_T^{FCF_T} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{1+k^{FCF}}{1+r} \cdot \frac{E_0[\tilde{V}_{T-1}^{FTD}]}{E_0[\tilde{V}_{T-1}^{TCF}]} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{1+k^{FCF}}{1+r} \cdot \mathbf{q} = WACC^{FCF}$$

Hiernach wird der für den Marktwert des Gesamtkapitals bewertungsrelevante mehrperiodige Total Cash Flow-Gesamtzahlungsstrom in insgesamt T mehrperiodige Total Cash Flow-Teilzahlungsströme $TCF^{FCF_t} = (TS_1^{FCF_t}, \dots, \tilde{TS}_t^{FCF_t} + F\tilde{C}F_t)$, $t=1, \dots, T$ zerlegt. Jeder Teilzahlungsstrom besteht dabei aus dem periodenbezogenen Free Cash Flow $F\tilde{C}F_t$ sowie aller von diesem Cash Flow verursachten Tax Shields. Die erwarteten Tax Shields der Teilzahlungsströme sind nach Gleichung (4), Abschnitt 2.2 wie folgt bestimmt:

$$(1) \quad E_0[\tilde{TS}_t^{FCF_t}] = (1+r) \cdot \left(\frac{a-1}{a} \right) \cdot \frac{E_0[F\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^{t-t+1}} \cdot a^{t-t+1}, \quad t=1, \dots, t$$

$$a = \frac{1+r}{1+r \cdot (1-q \cdot s)} \left(= \frac{1+k^{FCF}}{1+WACC^{FCF}} \right), \quad (1+r) \cdot \left(\frac{a-1}{a} \right) = q \cdot r \cdot s$$

Die auf der nächsten Seite angeführten Abbildungen 6 und 7 verdeutlichen das Cash Flow-Dekompositionsprinzip anhand der Beispieldaten.

Der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert $V_0(TCF^{FCF_t})$ des dem Free Cash Flow der Periode t zuzuordnenden Teilzahlungsstromes TCF^{FCF_t} lässt sich grundsätzlich auf der Grundlage aller in Kapitel 3 diskutierten Bewertungsprinzipien ermitteln. Hieraus resultieren prinzipiell 8 Bewertungsgleichungen, jeweils 4 Verbund-Bewertungsformeln und 4 Einzel-Bewertungsformeln. Das Augenmerk der folgenden Ausführungen liegt auf dem APV-Einzel-Bewertungsansatz und dem WACC-Verbund-Bewertungsansatz. Nach dem APV-Einzel-Bewertungsansatz gilt:³⁰

$$(2) \quad V_0(TCF^{FCF_t}) = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^t \frac{E_0[\tilde{TS}_t^{FCF_t}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}}$$

Der als Marktwert künftiger Total Cash Flows definierte Marktwert des Gesamtkapitals V_0^{TCF} ergibt sich in weiterer Folge aus der Summe der Marktwerte aller Teilzahlungsströme:

$$(3) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T V_0(TCF^{FCF_t}) = \sum_{t=1}^T \left(\frac{E_0[F\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^t \frac{E_0[\tilde{TS}_t^{FCF_t}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}} \right)$$

Unter Zugrundelegung des WACC-Verbund-Bewertungsansatzes ist der Marktwert von $TCF^{FCF_t} = (TS_1^{FCF_t}, \dots, \tilde{TS}_t^{FCF_t} + F\tilde{C}F_t)$ wie folgt bestimmt:³¹

$$(4) \quad V_0(TCF^{FCF_t}) = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t]}{(1+WACC^{FCF})^t}, \quad WACC^{FCF} = k^{FCF} - r \cdot s \cdot \frac{1+k^{FCF}}{1+r} \cdot q$$

Nach (2) und (4) gilt die Identität:

$$(5) \quad V_0(TCF^{FCF_t}) = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^t \frac{E_0[\tilde{TS}_t^{FCF_t}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}} = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t]}{(1+WACC^{FCF})^t}$$

Der mit dem Kalkulationszinssatz $WACC^{FCF}$ ermittelte Barwert des erwarteten Free Cash Flow der Periode t , $E_0[F\tilde{C}F_t]$, entspricht in der ökonomischen Interpretation dem Marktwert des riskanten Free Cash Flow der Periode t , $F\tilde{C}F_t$, zuzüglich aller von diesem Cash Flow verursachten Tax Shields $TS^{FCF_t} = (TS_1^{FCF_t}, \dots, \tilde{TS}_t^{FCF_t})$.

³⁰ Vgl. Abschnitt 3.2.2.1. Werden die Teilzahlungsströme TCF^{FCF_t} , $t=1, \dots, T$ auf der Grundlage des APV-Verbund-Bewertungsansatzes ((Abschnitt 3.1.2.4) bewertet, dann empfiehlt sich aus Praktikabilitätsgründen eine Kalkulation der in die Bewertung involvierten Diskontierungszinssätze nach Gleichung (3b).

³¹ Vgl. Abschnitt 3.1.2.3.

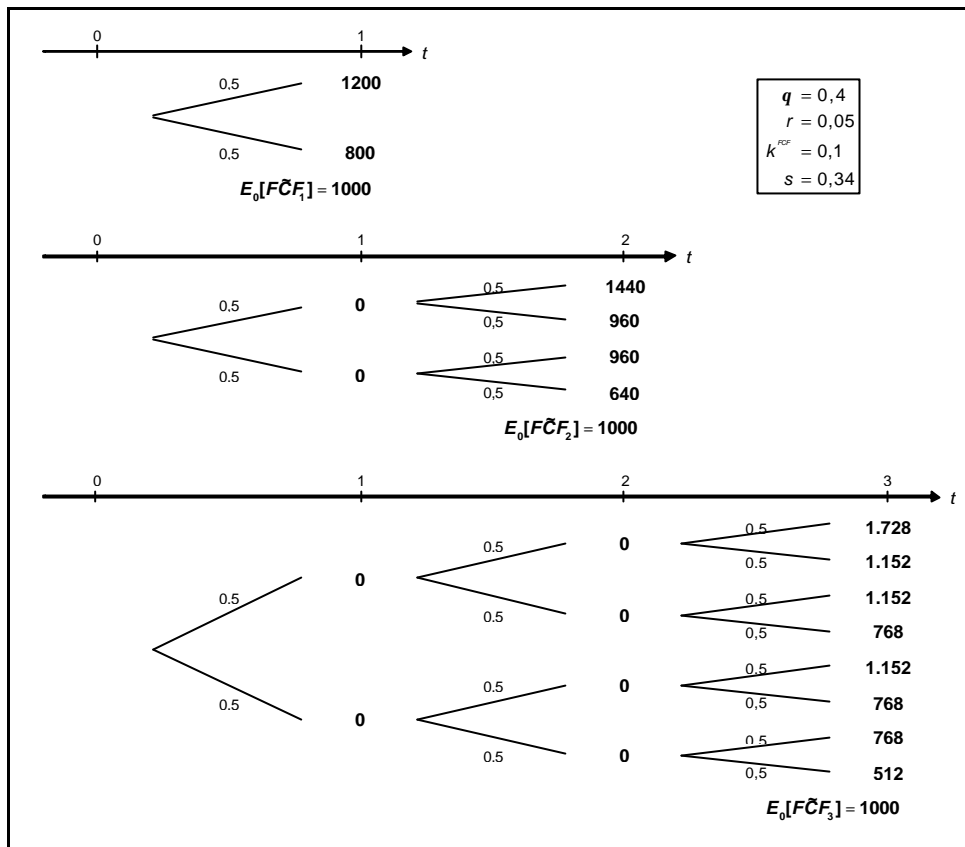


Abb. 6: Zustandsbäume aus periodenbezogenen Free Cash Flows

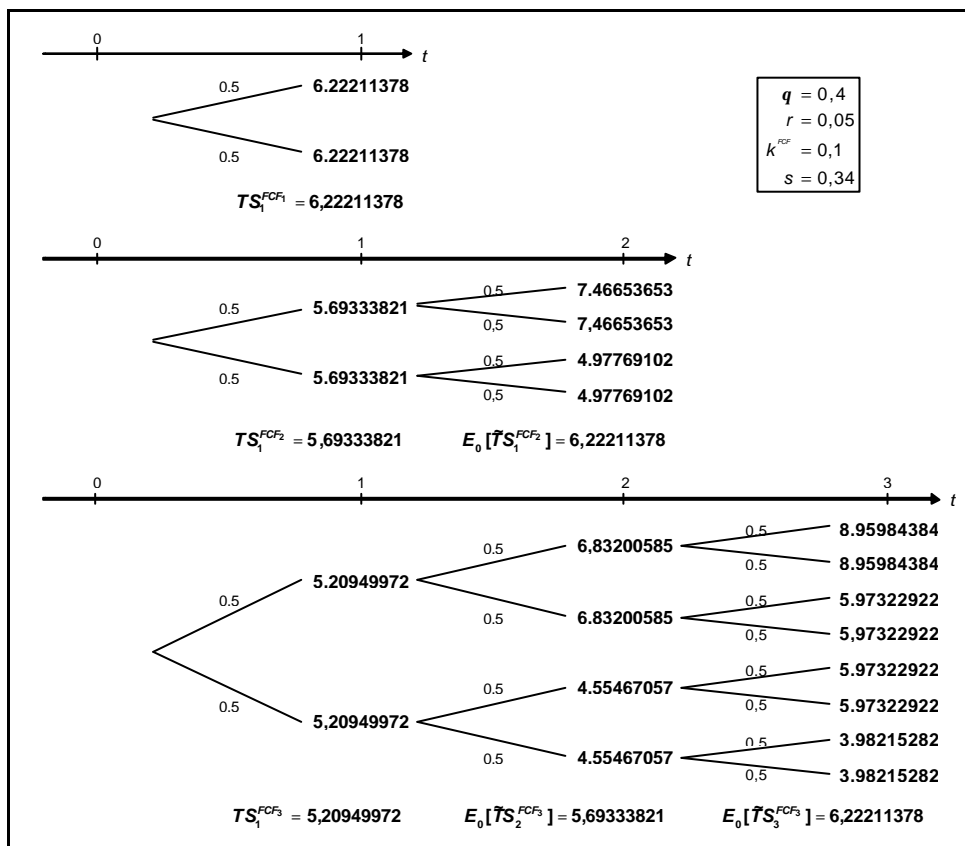


Abb. 7: Zustandsbäume aus Free Cash Flow -bezogenen Tax Shields

Diese den Barwertbeiträgen des WACC-Verbund-Bewertungsansatzes $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]/(1+WACC^{FCF})^t$ zukommende Interpretation lässt sich auch anschaulich im Kontext des APV-Einzel-Bewertungsansatzes aufzeigen. Werden die gemäß (1) definierten Bestimmungsgleichungen der erwarteten Tax Shields $E_0[\tilde{T}S_t^{FCF_t}]$, $t=1, \dots, T$ in (2) eingesetzt, dann erhält man nach wenigen Umformungen sowie unter Anwendung der Summenformel für endliche geometrische Reihen:

$$(6) \quad V_0(TCF^{FCF_t}) = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{(1+r) \cdot \left(\frac{a-1}{a}\right) \cdot \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^{t-t+1}} \cdot a^{t-t+1}}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}} = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{(1+k^{FCF})^t} \cdot a^t$$

Der in dieser Gleichung rechts stehende Term $a^t/(1+k^{FCF})^t$ ist gleich $1/(1+WACC^{FCF})^t$. Die aus der WACC-Verbundbewertung der Teilzahlungsströme TCF^{FCF_t} , $t=1, \dots, T$ resultierende Bestimmungsgleichung des Gesamtkapitalmarktwertes lautet schließlich:

$$(7) \quad V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T V_0(TCF^{FCF_t}) = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{(1+WACC^{FCF})^t}$$

Im Ergebnis bleibt festzuhalten, dass die Bewertung der Teilzahlungsströme TCF^{FCF_t} , $t=1, \dots, T$ auf der Grundlage des APV-Einzel-Bewertungsansatzes zu einer modifizierten APV-Bewertungsformel, die Bewertung von TCF^{FCF_t} , $t=1, \dots, T$ auf der Grundlage des WACC-Verbund-Bewertungsansatzes hingegen zu der bekannten Standardformel des WACC-Ansatzes führt. Für das hier betrachtete Beispiel mit Planungshorizont $T=3$ erhält man nach (3) und (7):

APV-Einzel-Bewertungsformel gemäß (3) für $T=3$

$$\begin{aligned} V_0^{TCF} &= V_0(TCF^{FCF_1}) + V_0(TCF^{FCF_2}) + V_0(TCF^{FCF_3}) \\ &= \frac{E_0[\tilde{T}S_1^{FCF_1}]}{1+r} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_1]}{1+k^{FCF}} \\ &\quad + \frac{E_0[\tilde{T}S_1^{FCF_2}]}{1+r} + \frac{E_0[\tilde{T}S_2^{FCF_2}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2]}{(1+k^{FCF})^2} \\ &\quad + \frac{E_0[\tilde{T}S_1^{FCF_3}]}{1+r} + \frac{E_0[\tilde{T}S_2^{FCF_3}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})} + \frac{E_0[\tilde{T}S_3^{FCF_3}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^2} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]}{(1+k^{FCF})^3} \end{aligned}$$

Mit den Zahlen des Beispiels ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} V_0^{TCF} &= V_0(TCF^{FCF_1}) + V_0(TCF^{FCF_2}) + V_0(TCF^{FCF_3}) \\ &= \frac{6,22211378}{1,05} + \frac{1000}{1,10} \quad \left(= 915,01673173 \right) \\ &\quad + \frac{5,69333821}{1,05} + \frac{6,22211378}{1,05 \cdot 1,20} + \frac{1000}{1,10^2} \quad \left(= 837,25561935 \right) \\ &\quad + \frac{5,20949972}{1,05} + \frac{5,69333821}{1,05 \cdot 1,10} + \frac{6,22211378}{1,05 \cdot 1,10^2} + \frac{1000}{1,10^3} \quad \left(= 766,10290045 \right) \\ &= \mathbf{915,01673173} + \mathbf{837,25561935} + \mathbf{766,10290045} = 2518,37525154 \end{aligned}$$

WACC-Verbund-Bewertungsformel gemäß (7) für $T = 3$

$$\begin{aligned}
V_0^{TCF} &= V_0(TCF^{FCF_1}) + V_0(TCF^{FCF_2}) + V_0(TCF^{FCF_3}) \\
&= \frac{E_0[\tilde{FCF}_1]}{1+WACC^{FCF}} + \frac{E_0[\tilde{FCF}_2]}{(1+WACC^{FCF})^2} + \frac{E_0[\tilde{FCF}_3]}{(1+WACC^{FCF})^3} \\
&= \frac{1000}{1,09287619} + \frac{1000}{1,09287619^2} + \frac{1000}{1,09287619^3} \\
&= \mathbf{915,01673173} + \mathbf{837,25561985} + \mathbf{766,10290045} = 2518,37525154
\end{aligned}$$

In der Interpretation von (3) erfolgt die Bestimmung des Gesamtkapitalmarktwertes V_0^{TCF} in zwei Schritten: Im ersten Schritt werden die Marktwerte der Teilzahlungsströme $TCF^{FCF_t} = (TS_1^{FCF_t}, \dots, \tilde{TS}_t^{FCF_t} + \tilde{FCF}_t)$, $t = 1, \dots, T$ ermittelt. Diese Berechnung führt zu insgesamt T Einzelmarktwerten $V_0(TCF^{FCF_t})$, $t = 1, \dots, T$. In einem zweiten Schritt werden die zuvor berechneten Einzelmarktwerte aufsummiert: $V_0^{TCF} = \sum_{t=1}^T V_0(TCF^{FCF_t})$. Die solcherart resultierende APV-Bewertungsformel für den Marktwert des Gesamtkapitals V_0^{TCF} ist nicht zu verwechseln mit der von Miles/Ezzell entwickelten Standardbewertungsformel des APV-Einzel-Bewertungsansatzes. Die Miles/Ezzell-Formel resultiert aus (3), wenn man nicht über die Marktwerte der *Free Cash Flow*-bezogenen Tax Shields, sondern über die Marktwerte der *periodenbezogenen* Tax Shields aufsummiert:

$$(8) \quad V_0^{TS} = \sum_{t=1}^T \sum_{t=t}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_t^{FCF_t}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}} = \sum_{t=1}^T \frac{\sum_{t=t}^T E_0[\tilde{TS}_t^{FCF_t}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{TS}_t]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^{t-1}}$$

In der Schreibweise von (8) erhält man im Beispiel folgende bekannte Darstellung für den Marktwert der Tax Shields:

$$\begin{aligned}
V_0^{TS} &= \left(\frac{E_0[\tilde{TS}_1^{FCF_1}]}{1+r} + \frac{E_0[\tilde{TS}_1^{FCF_2}]}{1+r} + \frac{E_0[\tilde{TS}_1^{FCF_3}]}{1+r} \right) + \left(\frac{E_0[\tilde{TS}_2^{FCF_2}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})} + \frac{E_0[\tilde{TS}_2^{FCF_3}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})} \right) + \left(\frac{E_0[\tilde{TS}_3^{FCF_3}]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^2} \right) \\
&= \frac{E_0[\tilde{TS}_1]}{1+r} + \frac{E_0[\tilde{TS}_2]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})} + \frac{E_0[\tilde{TS}_3]}{(1+r) \cdot (1+k^{FCF})^2} = \frac{17,12495171}{1,05} + \frac{11,91545199}{1,05 \cdot 1,10} + \frac{6,22211378}{1,05 \cdot 1,10^2}
\end{aligned}$$

5. Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurden drei Prinzipien der Cash Flow-Dekomposition diskutiert: Die horizontale Dekomposition von Cash Flows, die vertikale Dekomposition von Cash Flows und die Tax Shield-abhängige Dekomposition von Cash Flows. In Abhängigkeit von dem gewählten Cash-Flow-Dekompositionsprinzip ergeben sich höchst unterschiedliche Diskontierungszinssätze für die in die Bewertung involvierten Cash Flows. Dabei können nicht nur periodenspezifische Kalkulationszinssätze für einzelne Cash Flows, sondern auch periodenspezifische Kalkulationszinssätze über verschiedene Cash Flows hinwegresultieren.

Die verschiedenen Bewertungsgleichungen sind sowohl im Hinblick auf das absolute Bewertungsergebnis als auch im Hinblick auf ihre theoretische Fundierung als gleichwertig einzustufen. Unterschiede ergeben sich lediglich aus der ökonomischen Interpretation und dem vermeintlichen Zirkularitätsproblem.

Verzeichnis der zitierten Literatur

- Copeland, T./Koller, T./Murrin, J. (2000): *Valuation – Measuring and Managing the Value of Companies*, Third Edition, New York.
- Fama, E.F. (1977): Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting under Uncertainty, in: *Journal of Financial Economics*, 5, S. 3-24.
- Fama, E.F. (1996): Discounting under Uncertainty, in: *Journal of Business*, Vol. 69, S. 415-428.
- Fischer, E.O./Mandl, G. (2000): Die Ermittlung des Shareholder Value mittels risikolosem Zinsfuß und Risikokorrekturfaktor, in: *Die Betriebswirtschaft (DBW)*, Jg. 60, S. 459-472.
- Franke, G./Hax, H. (1999): *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, 4., neu bearb. u. erw. Aufl., Berlin.
- Hachmeister, D. (1995): *Der Discounted Cash Flow als Maß der Unternehmenswertsteigerung*, Frankfurt/M.
- Kruschwitz, L./Löffler, A. (2003): DCF (Part I), version from March 20, erhältlich unter: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=389408
- Laitenberger, J./Löffler, A. (2002): *Capital Budgeting in Arbitrage-Free Markets*, Diskussionspapier, Universität Hannover, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, erhältlich unter: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=318159
- Miles, J.A./Ezzell, J.R. (1980): The Weighted Average Cost of Capital, Perfect Capital Markets, and Project Life: A Clarifikation, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 15, S. 719-730.
- Miles, J.A./Ezzell, J.R. (1985): Reformulating Tax Shield Valuation: A Note, in: *Journal of Finance*, Vol. 40, S. 1485-1492.
- Modigliani, F./Miller, M.H. (1958): The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment, in: *American Economic Review*, Vol. 48, No. 3, S. 261-297.
- Modigliani, F./Miller, M.H. (1963): Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction, in: *American Economic Review*, 53, S. 433-443.
- Myers, S.C. (1974): Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions – Implications for Capital Budgeting, in: *Journal of Finance*, 29, S. 1-25.
- Richter, F. (1997): DCF-Methoden und Unternehmensbewertung: Analyse der systematischen Abweichungen der Bewertungsergebnisse, in: *Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft (ZBB)*, Jg. 9, S. 226-237.
- Richter, F. (2001): Simplified Discounting Rules in Binomial Models, in: *Schmalenbach Business Review*, Vol. 53, S. 175-196.
- Richter, F. (2002): Simplified Discounting Rules, Variable Growth, and Leverage, in: *Schmalenbach Business Review*, Vol. 54, S. 136-147.
- Schwetzler, B./Darijtschuk, N. (1999): Unternehmensbewertung mit Hilfe der DCF-Methode – eine Anmerkung zum „Zirkularitätsproblem“, in: *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 69, S. 295-318.
- Sick, G.A. (1986): A Certainty-Equivalent Approach to Capital Budgeting, in: *Financial Management*, Vol. 15, S. 23-32.
- Steiner, M./Wallmeier, M. (1999): Unternehmensbewertung mit Discounted Cash Flow-Methoden und dem Economic Value Added-Konzept, in: *Finanz Betrieb*, 1, S. 1-10.
- Wallmeier, M. (1999): Kapitalkosten und Finanzierungsprämissen, in: *Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB)*, Jg. 69, S. 1473-1489.

Das Standardmodell unter Unsicherheit ist ökonomisch unsinnig

Andreas Löffler¹

Version vom 4. März 2003

¹Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Universität Hannover, Königsworther Platz 1, 30167 Hannover. Der Autor dankt dem *Verein zu Förderung der Zusammenarbeit von Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V.* für finanzielle Unterstützung und Sven Husmann, Lutz Kruschwitz und Jörg Laitenberger für hilfreiche Anmerkungen.

Zusammenfassung

Will man den Einfluss der Einkommensteuer auf den Wert eines Projektes oder eines Unternehmens bestimmen, so bietet sich das Standardmodell als eines der populärsten Modelle an. Bei diesem Modell werden insbesondere im Nenner die Kapitalkosten um den Faktor $1 - \tau$ gekürzt, wobei τ den Steuersatz darstellt.

In dieser Arbeit wird das Standardmodell unter Unsicherheit im Rahmen eines einfachen Binomialmodells betrachtet. Es zeigt sich, dass dieses Modell bei Wahl geeigneter Parameter eine Arbitragegelegenheit kreiert wird und der gerade erwähnte Zusammenhang von Vor- und Nach-Steuer-Kapitalkosten nicht aufrecht erhalten werden kann.

Sodann wird eine Alternative der Einbeziehung der Einkommensteuer in den Kapitalwertkalkül diskutiert. Bei dieser Alternative zeigt sich, dass eine Erhöhung des Einkommensteuersatzes zu einer Verringerung des Unternehmenswertes führt.

JEL: G31, H24

1 Einleitung

Fragt man sich, ob ein Projekt bei gegebener Besteuerung durchgeführt oder unterlassen werden soll, so wird üblicherweise das so genannte "Standardmodell" verwendet. Es findet ebenso Anwendung, wenn man den Einfluss einer sich ändernden Steuerbelastung auf die Attraktivität eines Projektes untersuchen will. Im Folgenden wird das Standardmodell in einer unsicheren Umwelt im Vordergrund stehen – in dieser Form wird es typischerweise in der Unternehmensbewertung angewandt. Bei der Unternehmensbewertung spielt dabei die zweite genannte Fragestellung eine wichtige Rolle: wie kann der Einfluss einer sich ändernden Einkommensteuer auf den Wert eines Unternehmens korrekt bestimmt werden? Dieses Problem wurde im deutschen Sprachraum in letzter Zeit in einigen Veröffentlichungen diskutiert, es ist auch Gegenstand dieser Arbeit.

Es ist bekannt, dass im Fall einer ewigen Rente die Einkommensteuer keine Wirkung entfalten kann, da sie sowohl im Zähler wie auch im Nenner gleichermaßen Berücksichtigung findet und sich damit kürzt: dies hat viele Wirtschaftsprüfer lange zu der Annahme verleitet, die Einkommensteuer habe in der Unternehmensbewertung im Grunde keine Wirkung.¹ Seit den Arbeiten von Siepe (1997) hat sich der Standpunkt des IdW dahingehend geändert, dass nun vielmehr die Einkommensteuer generell zu berücksichtigen sei, da sie bei schwankenden finanziellen Überschüssen sehr wohl einen Einfluss auf den Unternehmenswert haben kann. Im Falle wachsender Unternehmen allerdings führt dies zu der unangenehmen Tatsache, dass der Unternehmenswert äußerst sensibel vom Einkommensteuersatz abhängt² – bei Unternehmen mit Streubesitz, bei dem die Wahl des richtigen Einkommensteuersatzes alles andere als offensichtlich ist, hat das enorme Schwierigkeiten bei der Bewertung zur Folge. Das IdW zog sich seinerzeit mit der Aufforderung aus der Affäre, in diesem Fall einen Einkommensteuersatz von 35% zu verwenden.³

Ein Ausweg schienen die Arbeiten von Ollmann & Richter (1999) und Laitenberger (2000) zu weisen. Die Autoren wiesen darauf hin, dass das deutsche Steuerrecht eine Differenzierung zwischen Kursgewinnen und Dividenden kennt und daher die klassische Gordon-Shapiro-Gleichung mit Wachstum nicht geeignet sei, den Unternehmenswert korrekt widerzuspiegeln. Löffler (2001) hat diese Erkenntnis insoweit berichtigt, als zwischen nicht realisierten und realisierten Kursgewinnen unterschieden werden muss.

Die von Ollmann/Richter und Laitenberger vorgeschlagene Lösung wirft jedoch folgendes Problem auf. Bekanntlich wird im klassischen Kapitalwertkalkül der Wert eines (unverschuldeten) Unternehmens durch die Gleichung

$$V_0 = \frac{E[\widetilde{CF}_1]}{1+k} + \dots + \frac{E[\widetilde{CF}_T]}{(1+k)^T} \quad (1)$$

¹So liest man beispielsweise im Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland (1998, II. Band, Teil A, Rz. 195): "In der St/HFA 2/1983 wurde noch davon ausgegangen, dass in einer Vielzahl von Fällen auf die (explizite) Einbeziehung der Steuerbelastung des Investors verzichtet werden könne, da sie keine Auswirkungen auf den Unternehmenswert habe."

²Siehe dazu beispielsweise Kruschwitz & Löffler (1998).

³Siehe dazu Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland (2000) sowie Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland (1998, II. Band, Teil A, Rz. 117): "[Durch die Verwendung des Einkommensteuersatzes von 35% – A.L.] wird vermieden, dass der objektivierte Unternehmenswert von – aufgrund unterschiedlicher Einkommensverhältnisse der Unternehmenseigner – individuell verschiedenen Steuersätzen abhängig gemacht wird."

bestimmt, wobei es sich bei den \widetilde{CF}_t um die unsicheren Zahlungsüberschüsse im Zeitpunkt t und bei k um die (hier der Einfachheit halber als konstant angenommenen) Kapitalkosten handelt. Soll nun der Einfluss der Einkommensteuer auf diese Gleichung untersucht werden, so muss (1) geeignet modifiziert werden. Es ist gängige Praxis, diese Modifikation wie folgt zu vorzunehmen ("Standardmodell")

$$V_0 = \frac{(1 - \tau) E[\widetilde{CF}_1] + \tau AfA_1}{1 + k(1 - \tau)} + \dots + \frac{(1 - \tau) E[\widetilde{CF}_T] + \tau AfA_T}{(1 + k(1 - \tau))^T}, \quad (2)$$

wobei jetzt τ den Einkommensteuersatz und AfA_t die Abschreibungen darstellen.⁴ Ein Beweis einer solchen Gleichung ist von einer Reihe diverser Annahmen abhängig, die wir hier kurz wiedergeben wollen:

- Es handelt sich beim Unternehmen um eine Personengesellschaft, die ihren Gewinn nach der Rechenvorschrift "Cashflow abzüglich Abschreibung" bestimmt.
- Der Gewinn wird den Einkünften des Unternehmenseigners hinzugerechnet und ist von ihm zu dem Zeitpunkt zu versteuern, in dem der Cashflow zufließt. Es findet dabei ein sofortiger Verlustausgleich statt.
- Der Steuersatz τ ist über die Lebensdauer des Unternehmens sicher und konstant.
- Auch eine eventuelle Kapitalmarktanlage unterliegt der Besteuerung. Daher bestimmt sich der Kapitalkostensatz nach Steuern als lineares Vielfaches des Kapitalkostensatzes vor Steuern.

Die letzte Aussage lässt sich dahingehend formulieren, dass aus der Kenntnis des Vor-Steuer-Kapitalkostensatzes sofort auf die Höhe des Kapitalkostensatzes nach Steuern geschlossen werden kann. Aber auch die Umkehrung ist richtig: wer den Kapitalkostensatz nach Steuern kennt, weiß, wie die erwarteten Cashflows des Unternehmens ohne Steuern zu diskontieren sind.

Wird nun ein gleichmäßiges Wachstum der Cashflows unterstellt, dann folgt allein aus formalen Überlegungen die Gordon-Shapiro-Gleichung⁵ und damit die Bewertungsformel, die von Ollmann & Richter (1999) und Laitenberger (2000) kritisiert wurde. Es stellt sich also die Frage, und dieses Problem soll in der vorliegenden Arbeit untersucht werden, ob nicht bereits die Kapitalwertgleichung mit Steuern (2) für eine Bewertung eines Unternehmens ungeeignet ist. Dabei wird sich zeigen, dass der gerade erwähnte lineare Zusammenhang von Vor- und Nach-Steuer-Kapitalkosten die Ursache des Problems darstellt.

⁴Diese Gleichung findet sich für den Fall unter Sicherheit in nahezu allen deutschen Lehrbüchern der Finanzierung, die das Thema Einkommensteuer behandeln: siehe beispielsweise Breuer (2000, S. 423), Franke & Hax (1999, S. 206), Kruschwitz (2002b, S. 139), Neus (2001, S. 299) oder Schierenbeck (2000, S. 370). Zur Anwendung dieser Gleichung auf unsichere Zahlungsströme vergleiche Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland (1998, II. Band, Teil A, Rz. 202). Amerikanische Lehrbüchern gehen auf diese Gleichung typischerweise nicht ein und behandeln höchstens den Fall der ewigen Rente, siehe Brealey & Myers (2000, S. 408), Copeland & Weston (1988, S. 558f.) oder Ross, Westerfield & Jaffe (1996, S.432f.).

⁵Der Beweis erfolgt durch simple Anwendung der Summenformel für geometrische Reihen.

Die Gleichung (2) taucht in der Literatur bereits sehr früh auf, sie findet sich beispielsweise bereits bei Johansson (1969).⁶ Die Behauptung, dass diese Gleichung nicht den korrekten Unternehmenswert widerspiegelt, muss auf den ersten Blick unglaubwürdig klingen. Dennoch werden die Ergebnisse dieser Arbeit keinen anderen Schluss zulassen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Im ersten Kapitel wird durch die Anwendung des Standardmodells in einer Welt unter Unsicherheit eine Arbitragegelegenheit erzeugt. Wir nutzen dazu das in der Literatur ausreichend bekannte Binomialmodell. Im zweiten Kapitel wird eine neue Bewertungsgleichung vorgeschlagen, die diese Schwierigkeiten überwindet. Der Fall der ewigen Rente zeigt, dass diese neue Bewertungsgleichung wesentlich vom klassischen Standardmodell abweicht.

2 Im Standardmodell können Arbitragen entstehen

2.1 Ein Binomial-Beispiel

Wir betrachten ein Binomialmodell mit unendlich vielen zukünftigen Zeitpunkten $t = 1, \dots$. Die Zukunft ist unsicher, in jedem Zeitpunkt sind ausgehend von einem Knoten zwei weitere Zustände, die wir mit *up* und *down* bezeichnen, möglich. Wir nehmen des Weiteren an, dass die Cashflows des rein eigenfinanzierten Unternehmens wie in Abbildung 1 veranschaulicht bei einer up-Bewegung mit dem Faktor u , bei einer down-Bewegung dagegen mit dem Faktor d wachsen. Wenngleich im Zeitpunkt $t = 0$ keine Cashflows mehr zufließen, bezeichnen wir dennoch den "Ausgangspunkt" der CF-Bewegung mit CF_0 .

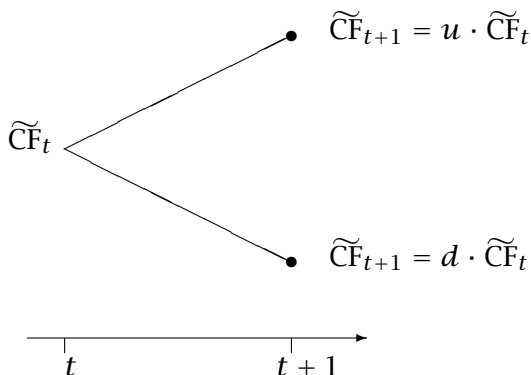


Abbildung 1: Cashflows vor Steuern \tilde{C}_t in $t, t+1$

Den Wert des Unternehmens im Zeitpunkt t bezeichnen wir mit \tilde{V}_t , er ist unsicher. Es gibt des Weiteren eine risikolose Geldanlage (Bond), die im Zeitpunkt t den Zins $r_f B$ zahlt. Der Investor kann in das Unternehmen oder den Bond investieren.

Die subjektiven Wahrscheinlichkeiten der Investoren gestaltet sich wie folgt: der Investor erwartet in jedem Zeitpunkt eine up-Bewegung mit der Wahrscheinlichkeit p^u , eine down-Wahrscheinlichkeit mit der Wahrscheinlichkeit $p^d = 1 - p^u$. Wir bezeichnen den beding-

⁶Johansson widmet der Frage, ob in der Tat $k(1-s)$ einen korrekten Nach-Steuer-Kapitalmarktzins darstellt, allerdings mehrere Absätze und weist deutlich darauf hin, dass hierfür eine Reihe von steuerlichen Bedingungen erfüllt sein müssen.

ten Erwartungswert eines Cashflows \widetilde{CF}_{t+1} im Zeitpunkt t mit dem Symbol $E[\widetilde{CF}_{t+1}|\mathcal{F}_t]$. Offensichtlich gilt

$$E[\widetilde{CF}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{CF}_t \cdot (p^u u + p^d d). \quad (3)$$

Wenden wir uns nun der Einkommensteuer zu. Das Steuersubjekt der Einkommensteuer ist der Investor, der die Rückflüsse aus dem Unternehmen versteuert. In unserem Fall gehen wir davon aus, dass die EBIT und Cashflows zusammenfallen: die Bemessungsgrundlage der Steuer in t ist also gerade der Cashflow \widetilde{CF}_t . Der Steuersatz ist unabhängig von der Bemessungsgrundlage und zeitlich konstant. Die Steuerfunktion ist linear, und die Steuer $\tau\widetilde{CF}_t$ ist im Zeitpunkt t zu zahlen. Da auch Zinseinkünfte der Besteuerung unterliegen, erhält der Investor, wenn er in den Bond investiert, in jedem Zeitpunkt die Nach-Steuer-Zahlung $r_f(1 - \tau)B$.

Um den Wert des Unternehmens \widetilde{V}_t zu bestimmen, müssten wir nun die Kapitalkosten festlegen. Für uns sind die Kapitalkosten des Unternehmens diejenigen (bedingten) erwarteten Renditen, die ein Investor bei einer einperiodigen Investition in das Unternehmen erhält. Würde beispielsweise ein Investor in t das Unternehmen erwerben und eine Periode später den Cashflow erhalten und das Unternehmen wieder verkaufen, so liefe das bei Berücksichtigung der Steuer auf eine erwartete Nach-Steuer-Rendite der Höhe⁷

$$k^\tau := \frac{E[\widetilde{CF}_{t+1}(1 - \tau) + \widetilde{V}_{t+1}|\mathcal{F}_t]}{V_t} - 1 \quad (4)$$

hinaus.

Allerdings weist die Verwendung eines solchen Kapitalkosten-Konzeptes noch eine kleine Schwierigkeit auf. Werden Kapitalkosten entsprechend der Definition (4) bestimmt, so ist a priori noch nicht selbstverständlich, dass es sich dabei um sichere Größen handelt, mit denen diskontiert werden könnte. Vielmehr stehen sowohl im Zähler wie auch im Nenner Zufallsvariablen, und nur per reinem Zufall dürfte der Quotient eine sichere Größe sein. Mit Zufallsvariablen aber kann man nicht diskontieren. Man behilft sich an dieser Stelle mit einer Annahme: wir setzen im Folgenden voraus, dass die via (4) definierten Kapitalkosten immer sichere Größen sind. Diese Voraussetzung stellt eine starke Einschränkung dar, die jedoch, wie an anderer Stelle gezeigt wurde, für die Anwendung des Kapitalwertkalküls unter Unsicherheit unabdingbar ist.⁸

Wir werden im Folgenden der Einfachheit halber annehmen, dass die Kapitalkosten k_t^τ in unserem Modell zeitlich konstant sind. Würden wir nun die Definition (4) geeignet umstellen, so führt dies sofort auf die Kapitalwertgleichung (1).⁹

Bei den Kapitalkosten riskanter Investitionen treffen wir eine weitere Annahme. Wir gehen davon aus, dass wir zusätzlich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten Q , die wir mit q^u und $q^d = 1 - q^u$ bezeichnen, kennen. Die Vorgabe dieser risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten dient in erster Linie dem Nachweis der Arbitragefreiheit unseres Modells; nach Harrison & Kreps (1979) existieren solche risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten in

⁷Es handelt sich hier um eine Gewinnsteuer. Wir unterstellen also, dass Kursgewinne steuerfrei bleiben. Anderenfalls wäre die Definition der Nach-Steuer-Rendite zu modifizieren.

⁸Siehe dazu die Ausführungen in Kruschwitz & Löffler (2002, S. 7ff.).

⁹Zum Beweis siehe Kruschwitz & Löffler (2002, S. 22, Satz 1.1).

vollständigen Märkten nämlich dann und nur dann, wenn das gewählte Modell arbitragefrei ist.¹⁰ Diese Wahrscheinlichkeiten haben weiter folgende Eigenschaft: bildet man die Erwartungswerte der Cashflows mittels dieser Wahrscheinlichkeit und diskontiert sie mit dem risikolosen Zins, so erhält man den Wert eines Unternehmens. Für unser Modell gilt also¹¹

$$\tilde{V}_t = \frac{E_Q[\tilde{C}\tilde{F}_{t+1}(1 - \tau) + \tilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1 + r_f(1 - \tau)}. \quad (5)$$

Unser System ist nun in folgendem Sinn überbestimmt: die Unternehmenswerte müssen sowohl die Gleichung (5) als auch die Relation für die Kapitalkosten (4) erfüllen. Es muss daher einen formalen Zusammenhang zwischen den Kapitalkosten und den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten geben. Um diesen Zusammenhang formal herzuleiten, müssen wir uns folgender Überlegung bedienen. Die Cashflows des Unternehmens wachsen in jedem Knoten um den Faktor u (falls die Bewertung aufwärts erfolgt) oder d (falls die Bewertung abwärts erfolgt). Demzufolge müssen, da die Kapitalkosten des Unternehmens per Annahme konstant bleiben, auch die Unternehmenswerte bei einer Aufwärts-Bewegung um den Faktor u und bei einer Abwärts-Bewegung um den Faktor d wachsen:

$$\tilde{V}_{t+1} = \begin{cases} u \cdot \tilde{V}_t & \text{falls } u, \\ d \cdot \tilde{V}_t & \text{falls } d. \end{cases}$$

Dies setzen wir nun in die Bedingung (5) ein und erhalten

$$\tilde{V}_t = \frac{q^u(u\tilde{C}\tilde{F}_t(1 - \tau) + u\tilde{V}_t) + q^d(d\tilde{C}\tilde{F}_t(1 - \tau) + d\tilde{V}_t)}{1 + r_f(1 - \tau)} = \frac{(q^u u + q^d d)(\tilde{C}\tilde{F}_t(1 - \tau) + \tilde{V}_t)}{1 + r_f(1 - \tau)}.$$

und daraus sofort der Zusammenhang

$$\tilde{V}_t = \frac{(q^u u + q^d d)(1 - \tau)}{1 + r_f(1 - \tau) - (q^u u + q^d d)} \tilde{C}\tilde{F}_t =: A \cdot \tilde{C}\tilde{F}_t. \quad (6)$$

Der Faktor A ist daher eine nicht-stochastische Größe. Mit Hilfe dieser Relation gelingt es uns endlich, den formalen Zusammenhang zwischen Kapitalkosten und risikoneutraler Wahrscheinlichkeit herzuleiten. Wir setzen Gleichung (6) sowohl in die Gleichung (4) als

¹⁰Die Annahme der Vollständigkeit kann abgeschwächt werden, grob gesprochen sind die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten genau in vollständigen Märkten eindeutig. Für Details siehe Magill & Quinzii (1996, S. 73ff.).

¹¹In Teilen der Literatur spricht man auch von einem äquivalenten Martingalmaß oder Pseudowahrscheinlichkeiten. Mehr über risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten im Binomialmodell findet man bei Kruschwitz (2002a, S. 274ff.) oder Copeland & Weston (1988, S. 260). Der Zusammenhang von risikoneutraler Wahrscheinlichkeit und Arbitragefreiheit wurde von mehreren Autoren verallgemeinert. Einen Beweis für unser Modell ohne Steuern findet man beispielsweise bei Back & Pliska (1991), der Fall mit Steuern wurde in Löffler & Schneider (2002) bewiesen.

auch (5) ein:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t &= \frac{E[(1 - \tau)\tilde{C}\tilde{F}_{t+1} + A \cdot \tilde{C}\tilde{F}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1 + k^\tau} = \frac{E_Q[(1 - \tau)\tilde{C}\tilde{F}_{t+1} + A \cdot \tilde{C}\tilde{F}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1 + r_f(1 - \tau)} \\ &= \frac{E[\tilde{C}\tilde{F}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1 + k^\tau} = \frac{E_Q[\tilde{C}\tilde{F}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1 + r_f(1 - \tau)} \\ \frac{(p^u u + p^d d)\tilde{C}\tilde{F}_t}{1 + k^\tau} &= \frac{(q^u u + q^d d)\tilde{C}\tilde{F}_t}{1 + r_f(1 - \tau)} \\ q^u u + q^d d &= \frac{1 + r_f(1 - \tau)}{1 + k^\tau} (p^u u + p^d d)\end{aligned}$$

Eine der wichtigsten Aussagen des Standardmodells zum linearen Zusammenhang der Vor- und Nach-Steuer-Rendite haben wir bisher noch nicht verwendet. Berücksichtigen wir nun, dass die Nach-Steuer-Rendite das $(1 - \tau)$ -fache der Vor-Steuer-Rendite darstellt, so erhalten wir

$$q^u u + q^d d = \frac{1 + r_f(1 - \tau)}{1 + k(1 - \tau)} (p^u u + p^d d). \quad (7)$$

Nach all diesen ermüdenden Rechnungen wenden wir uns einem Beispiel zu. Wir unterstellen, dass die subjektiven Wahrscheinlichkeiten, die Kapitalkosten wie auch der risikolose Zins gegeben sind:¹²

$$k = 15\%, r_f = 5\%, u = 1.2, d = 0.9333, p^u = 25\%.$$

Wir können nun die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Steuersatz ermitteln. Das Ergebnis ist in Tabelle 2 dargestellt.

Steuersatz τ	q^u	q^d
0%	-0.076	1.076
10%	-0.047	1.047
25%	-0.003	1.003
50%	0.076	0.924

Abbildung 2: Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten im Beispiel

Wie ist dieses Ergebnis zu verstehen? Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit des Zustandes up ist für Steuersätze τ kleiner als etwa 26% negativ. Da wir ein vollständiges Modell vor uns haben, kann ein Investor ein Wertpapier erwerben, das nur im Zustand up eine Geldeinheit zahlt. Der Preis für diese Geldeinheit bestimmt sich anhand der Gleichung (5) aus dem Erwartungswert E_Q der Zahlung – da nur in dem Zustand eine Geldeinheit versprochen wird, in dem die Wahrscheinlichkeit Q selbst negativ ist, ist das Ergebnis jedoch negativ. Daraus ziehen wir den Schluss, dass das genannte Wertpapier zu einem

¹²Die erwartete Wachstumsrate der Cashflows ist in diesem Beispiel gerade null:

$$p^u u + p^d d = 1.$$

negativen Preis erworben werden kann, obwohl es selbst in der Zukunft nur nichtnegative Zahlungen verspricht. Dies stellt eindeutig eine Arbitragegelegenheit dar.¹³

Wenn in einer Welt Arbitragegelegenheiten existieren, dann können wir ein Unternehmen nicht sinnvoll bewerten. Ein Unternehmen hat in einer solchen Welt überhaupt keinen Wert. Erst Recht können wir nicht behaupten, dass diese Unternehmen irgendwelche wie auch immer gearteten Kapitalkosten aufweist. Die Tabelle lässt nur den folgenden Schluss zu: Wenn sich die versteuerten Kapitalkosten aus den unversteuerten Kapitalkosten gemäß der Rechenregel (2) bestimmen sollen, dann kann bei einer durchaus realistischen Wahl diverser Parameter im Binomialmodell eine Situation entstehen, in der die Vor-Steuer-Welt eine Arbitragegelegenheit aufweist und sich damit völlig rationalen Betrachtungen entzieht. Der Zusammenhang in Gleichung (2) verliert damit vollends seinen Sinn.

Die gerade beschriebene Arbitragegelegenheit darf nicht mit dem Steuerparadox verwechselt werden! Beim Steuerparadox wird eine Aussage über das Verhältnis der Welt vor und der Welt nach Steuern getroffen. In beiden Fällen können Unternehmen bewertet werden, die Höhe dieser Werte allerdings weicht voneinander ab. Beispielsweise ist der Wert vor Steuern kleiner als eine eventuelle Investitionsausgabe (dies wäre gleichbedeutend einem negativem NPV), während der Wert nach Steuern höher als eine eventuelle Investitionsausgabe ist (dann wäre der NPV jetzt positiv). Die Abweichung beider Unternehmenswerte schafft gerade das Steuerparadox. Hier dagegen wird ein anderer Zusammenhang diskutiert: hier wird anhand eines Beispiel gezeigt, dass in einer Welt vor Steuern dem Unternehmen gar kein Wert mehr zugeordnet werden kann! Während das Steuerparadox ein Problem darstellt, mit dem in der Finanzierungstheorie durchaus umgegangen werden kann, haben wir hier unser Modell als in sich widersprüchlich, ja ökonomisch unsinnig nachgewiesen.

Das hier dargestellte Problem ist um so tückischer, weil es sich erst durch die Betrachtung der stochastischen Struktur der Cashflows offenbart. In der Unternehmensbewertung ist es üblich, sich allein auf die Erwartungswerte $E[\tilde{CF}_t]$ und die Kapitalkosten k zu konzentriert. Nahezu nichts wird über die Höhe der Cashflows in den einzelnen Zuständen (und damit ihre stochastische Struktur) in Erfahrung gebracht, ebenso verwendet man üblicherweise keine Zeit auf die Frage, ob die Cashflows einem Binomialmodell oder einem viel komplexeren Gebilde folgen. Dann aber bleibt einem (wie unser Beispiel zeigt) verborgen, dass wir uns im Bewertungskalkül möglicherweise auf sehr dünnem Eis bewegen – trotz erwarteter Cashflows und ebenso “vernünftiger” Kapitalkosten haben wir hier schlichtweg ein ökonomisch unsinniges, in sich widersprüchliches Modell vor uns, dessen Anwendung sich verbietet.

2.2 Wieso kommt es zu diesem Problem?

Das gerade erzielte Ergebnis ist verblüffend: wer bei der Unternehmensbewertung den Zusammenhang von Vor- und Nach-Steuer-Kapitalkosten (2) verwendet, der greift unter Umständen auf ein unsinniges ökonomisches Modell zurück. Wie kommt es zu diesem Ergebnis? Dazu müssen wir uns klarmachen, auf welcher Grundlage der Vergleich der

¹³Vergleiche dazu beispielsweise Kruschwitz (2002a, S. 137ff.). Kruschwitz bezeichnet dies als Arbitragegelegenheit vom Typ 1.

Welt mit und ohne Steuern erfolgte.

Es war das Ziel der Bewertungsgleichung (2), den Wert eines Unternehmens bei einer sich ändernden Steuerbelastung zu untersuchen. Damit es sich hier um eine sinnvolle Fragestellung handelt, muss man offensichtlich die Unveränderlichkeit verschiedener Ausgangsgrößen fordern, wenn sich die Steuerbelastung ändert – anderenfalls verkommt der Vergleich zu einer Farce. Welche Größen sind es, deren Unveränderlichkeit man üblicherweise voraussetzt?

Sinnvollerweise verändern sich die (Brutto-)Cashflows nicht durch die Einführung einer Einkommensteuer, das gleiche gilt auch für die subjektiven Wahrscheinlichkeiten des Investors. So trivial diese Aussage auch ist, diese Bedingung reicht noch nicht hin, um einen sinnvollen Vergleich zu führen. In unserem Beispiel sind auch der risikolose Zins in der steuerlosen Welt und der risikolose Vor-Steuer-Zins in der besteuerten Welt identisch. Bewerten heißt vergleichen, und demzufolge muss es auch ein geeignetes Vergleichsobjekt, dessen Wert man bereits kennt, geben. Im oben notierten Beispiel haben wir gleich zwei Objekte, die eine Bewertung des Unternehmens erlauben: es sind sowohl die Kapitalkosten (vor Steuern) wie auch die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten. Wer entweder diese Kapitalkosten oder aber die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten kennt, kann den Marktwert des Unternehmens ermitteln. Welche der beiden Größen man für eine Bewertung des Unternehmens auswählt, spielt keine Rolle, da zwischen beiden ein klar definierter formaler Zusammenhang (beschrieben in Gleichung (7)) besteht. An dieser Stelle tritt aber das Problem auf.

Konzentrieren wir uns dazu vorerst auf die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten und nicht auf die Kapitalkosten. A priori ist nicht offensichtlich, ob und wie sich gegebenenfalls die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bei Einführung einer Steuer ändern. Man muss sich aber nun folgendes klarmachen: wer eine feste Relation zwischen Vor- und Nach-Steuer-Kapitalkosten wie etwa in (2) unterstellt, der fixiert gleichzeitig eine gewisse Veränderung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten via Gleichung (7). Und diese Veränderung, dies zeigt unser Beispiel, kann in durchaus realistischen Umständen dazu führen, dass die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten negativ werden und das Modell damit ökonomisch unsinnig wird.

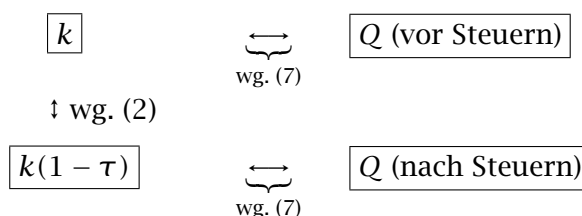


Abbildung 3: Zusammenhang von Kapitalkosten und Wahrscheinlichkeiten Q

Welche Schlussfolgerung ist aus dem Beispiel zu ziehen? Wir müssen festhalten: wer das Standardmodell einer Gewinnsteuer verwendet, läuft Gefahr, ein ökonomisch unsinniges Modell zu verwenden. Das wirft folgende Frage auf: Wenn wir nicht das Standardmodell einer Gewinnsteuer verwenden dürfen, wie kann dann die Frage nach dem Einfluss einer Einkommensteuer auf den Unternehmenswert behandelt werden? Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

3 Der Einfluss einer Einkommensteuer – ein neues Standardmodell

Um den Einfluss einer Einkommensteuer auf den Wert eines Unternehmens zu analysieren, greifen wir die Diskussion des vorigen Abschnittes noch einmal auf. Der Wert eines Unternehmens wurde sowohl bei Vernachlässigung der Einkommensteuer als auch bei ihrer Einbeziehung ermittelt. Beide Unternehmenswerte wurden dann miteinander verglichen, um den Einfluss der Einkommensteuer deutlich zu machen. Ein solcher Vergleich macht jedoch nur Sinn, wenn man die sich ändernden Elemente des Modells bestimmt. Welche Elemente sollen dies sein?

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass es ein Unternehmen in einer Welt ohne Steuern gibt, das im Zeitpunkt t Cashflows der Höhe \widetilde{CF}_t verspricht. Die subjektiven Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände seien mit P bezeichnet, der risikolose Zins sei r_f . Es gebe weiterhin eine risikoneutrale Wahrscheinlichkeit Q derart, dass für den Marktwert des Unternehmens analog zur Gleichung (5) der Zusammenhang

$$\widetilde{V}_t = \frac{E_Q[\widetilde{CF}_{t+1} + \widetilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1 + r_f}. \quad (8)$$

gilt, wobei hier \widetilde{V}_t den Wert ohne Steuereinfluss darstellt. Das ermöglicht es uns, die Kapitalkosten des Unternehmens (analog zur Gleichung (4)) zu definieren

$$k_t := \frac{E[\widetilde{CF}_{t+1} + \widetilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\widetilde{V}_t}. \quad (9)$$

Wird nun eine Einkommensteuer erhoben, so mögen die Brutto-Cashflows vor Abzug der Einkommensteuer weiterhin \widetilde{CF}_t betragen. Des weiteren sollen sich die subjektiven Wahrscheinlichkeiten wie auch der risikolose Zins vor Einkommensteuer nicht ändern. Was aber geschieht mit den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten (und damit mit den Kapitalkosten nach Steuern)?

Eine umfassende Antwort auf diese Frage könnte der Versuch ergeben, ein CAPM-Gleichgewichtsmodell mit mehreren Investoren zu betrachten. Im Anhang wurde die Rechnung für ein derartiges Modell vorgenommen. Dabei ergab sich folgendes Resultat. Unterstellt man einen einfachen Fall mit nur zwei Investoren und einfachen Nutzenfunktionen sowie einer Erstaussstattung, die von einem willkürlichen Parameter a abhängig ist, so ist für die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten nach Steuern jede nur denkbare Konstellation (soweit sie Arbitragefreiheit zulässt) ökonomisch als Gleichgewicht möglich. Aus diesem sehr einfachen Beispiel müssen wir den Schluss ziehen, dass Gleichgewichtsüberlegungen völlig ungeeignet sind, um die Veränderung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bei Einführung einer Einkommensteuer zu beschreiben. Es bleibt uns nichts anderes übrig, als hier eine ad hoc-Annahme zu treffen.

Diese ad hoc-Annahme besteht in der Unterstellung, dass sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten durch die Einführung einer Einkommensteuer nicht ändern. Für uns stellt diese ad hoc-Annahme nach den einfachsten möglichen Fall dar, den wir unter der Vielzahl der gegebenen Möglichkeiten betrachten können. Natürlich könnte man auch ad hoc

annehmen, dass sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten nach einer wohl definierten Regeln ändern. Dann wären die nachfolgenden Überlegungen entsprechend der Regel zu modifizieren.

Die Annahme hat den unbestreitbaren Vorteil, dass daraus sofort die Arbitragefreiheit des Kapitalmarktes mit oder ohne Einkommensteuer folgt, denn die Existenz der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ist trivialerweise sichergestellt.¹⁴ Unsere Annahme scheint gerechtfertigt zu sein, wenn die Einkommensteuer keinen großen Einfluss auf das Preissystem eines Kapitalmarktes ausüben wird. In allen anderen Fällen dagegen sollte die Rückwirkung des Unternehmens auf den Kapitalmarkt modelliert werden.

Um eine handhabbare Bewertungsgleichung zu erhalten, sind jedoch noch weitere Annahmen notwendig. So unterstellen wir, dass zum einen die Abschreibungen in der Zukunft sichere Größen sind. Zum anderen treffen wir die Annahme, dass die Cashflows des Unternehmens der folgenden Fundamentalannahme gehorchen¹⁵

$$\widetilde{CF}_{t+1} = (1 + g_t)\widetilde{CF}_t + \varepsilon_{t+1}.$$

Die Cashflows weisen damit ein sicheres Wachstum in Höhe von g_t auf und sind zudem dem Einfluss von Störtermen ε_t ausgesetzt. Diese Störterme sind stochastisch unkorreliert. Die Annahme der Unkorreliertheit ist wesentlich schwächer als die oft geforderte Unterstellung, die Cashflows folgen einem random walk: im Fall des random walk müssen die Störterme zudem noch unabhängig sein.

Man kann nun zeigen (siehe dazu den Anhang), dass unter diesen Voraussetzungen der folgende Zusammenhang für den Wert eines Unternehmens vor und nach Steuern besteht:

$$V_0 = \frac{(1 - \tau) E[\widetilde{CF}_1] \frac{1+r_f}{1+k} + \tau AfA_1}{1 + r_f(1 - \tau)} + \dots + \frac{(1 - \tau) E[\widetilde{CF}_T] \left(\frac{1+r_f}{1+k}\right)^T + \tau AfA_T}{(1 + r_f(1 - \tau))^T}. \quad (10)$$

Fallen die Kapitalkosten vor Steuern mit den risikolosen Zinsen zusammen, so zeigt sich kein Unterschied zum klassischen Standardmodell (2). Ein möglicher Unterschied entsteht also nur bei der Bewertung von Unternehmen mit unsicheren Cashflows.

Dieser Unterschied zum klassischen Standardmodell wird aber besonders deutlich, wenn der Fall der ewigen Rente (gleich bleibende Erwartungswerte der Cashflows oder kein Wachstum $g_t = 0$) betrachtet wird. Hier unterstellen wir wieder der Einfachheit halber, dass die Cashflows gleichzeitig die Bemessungsgrundlage der Gewinnsteuer darstellen. Dann schreibt sich die letzte Gleichung einfacher als

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1 - \tau) E[\widetilde{CF}_t]}{(1 + r_f(1 - \tau))^t} \left(\frac{1 + r_f}{1 + k}\right)^t \\ &= (1 - \tau) E[\widetilde{CF}_1] \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1 + r_f}{(1 + r_f(1 - \tau))(1 + k)}\right)^t \\ &= \frac{(1 - \tau) E[\widetilde{CF}_1]}{(1 + r_f(1 - \tau))^{\frac{1+k}{1+r_f}} - 1} \end{aligned} \quad (11)$$

¹⁴Für Details siehe dazu Löffler & Schneider (2002).

¹⁵Ohne diese Annahme sind im Grunde keine gehaltvollen Aussagen möglich. Mehr über diese Annahme in Kruschwitz & Löffler (2002, S. 29ff.).

In erster Näherung können wir den Nenner wie folgt abschätzen¹⁶

$$V_0 \approx \frac{(1 - \tau) E[\widetilde{CF}_1]}{k - r_f \tau}.$$

Hier zeigt sich ganz deutlich der Einfluss der unveränderlichen risikoneutralen Wahrscheinlichkeit im Nenner. Während im klassischen Standardmodell der versteuerte Cashflow durch die Differenz $k - k\tau$ zu dividieren ist, verwendet man in dem hier vorgeschlagenen Modell (in erster Näherung) die Differenz $k - r_f \tau$. Noch deutlicher zeigt sich der Effekt anhand eines Zahlenbeispiels. In der Abbildung 4 ist der Marktwert eines Unternehmens gemäß Gleichung (11) dem Marktwert $\frac{E[\widetilde{CF}_1]}{k}$ gegenübergestellt, der sich bei Anwendung des klassischen Standardmodells ergäbe. Insbesondere fällt sofort auf, dass mit wachsendem Steuersatz der Wert des Unternehmens fällt. Dieses Verhalten des Unternehmenswertes mit wachsendem Steuersatz ist vollständig entgegengesetzt zu den Ergebnissen, die man im klassischen Standardmodell erhält.

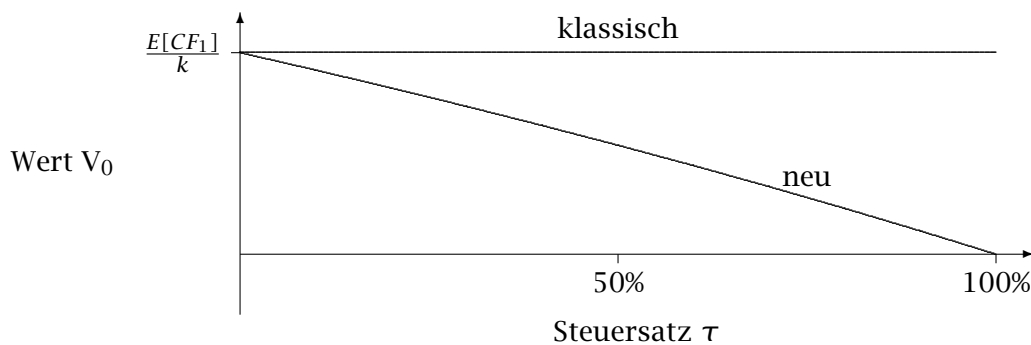


Abbildung 4: Neues versus klassisches Standardmodell in der ewigen Rente

4 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass die Anwendung des klassischen Standardmodells in durchaus realistischen Situationen zu Arbitragegelegenheiten führen kann. Ein Ausweg aus dem Dilemma bestand darin, die folgenden zwei Annahmen zu treffen:

- Das risikoneutrale Maß bleibt auch bei Einführung einer Einkommensteuer unverändert.
- Die Cashflows des Unternehmens erfüllen die Fundamentalannahme.

¹⁶Man nutzt die Taylorreihe, hier gilt

$$\frac{1+x}{1+y} \approx 1+x-y.$$

Es zeigte sich, dass unter diesen Voraussetzungen ein Problem des klassischen Standardmodells beseitigt werden. In diesem Fall konnte außerdem eine neue Gleichung ("neues Standardmodell") hergeleitet werden. Die Marktwerte eines Unternehmens beim neuen Standardmodell unterschieden sich wesentlich von den Werten beim klassischen Standardmodell.

Die beiden genannten Annahmen stellen ohne Frage eine Einschränkung dar. Will man diese Einschränkung nicht akzeptieren, so kann man allerdings keinesfalls zum klassischen Standardmodell zurückkehren. Um zum klassischen Standardmodell zurückkehren zu können, muss man vielmehr die stochastische Struktur der Cashflows offen legen und des weiteren beweisen, dass das Modell keine Arbitragegelegenheiten bei Einführung (oder Vernachlässigung) der Einkommensteuer erlaubt.

5 Anhang

5.1 Ein Gleichgewichtsbeispiel

Wir beschränken uns bei der Rechnung auf ein Ein-Perioden-Modell ($t = 0, 1$). Die Investoren können die beiden Basistitel handeln. Wir gehen davon aus, dass am Markt zwei Investoren mit den Nutzenfunktionen

$$V^{1,2}(\mu, \sigma^2) = \mu - a\sigma^2$$

handeln. $a > 0$ ist ein frei skalierbarer Parameter. Die Steuer ist linear, der Steuersatz ist τ . Bemessungsgrundlage ist Cashflow minus Abschreibung, wobei die Abschreibung in Höhe des Preises in $t = 0$ vorzunehmen ist.

Die Investoren erwerben Portfolios der Form

$$X = (X_S, X_B),$$

wobei X_B die Anzahl der (risikolosen) Bonds und X_S die Anzahl der Anteile am Unternehmen angeben. Die Investoren besitzen die folgenden Erstausstattungen: der erste Investor hat eine Einheiten Bond zur Verfügung. Der zweite Investor hat eine Einheit des Unternehmens zur Verfügung:

$$\bar{X}^1 = (0, 1), \quad \bar{X}^2 = (1, 0).$$

Die Erwartungswerte und Varianzen der Portfolios können wir ebenfalls ermitteln. Der Einfachheit halber koste ein Bond eine Einheit ($B = 1$) und der Ausgangspunkt der Cashflows sei ebenfalls eine Geldeinheit ($CF_0 = 1$). Der risikolose Zins sei der Einfachheit halber null. Dann gilt für den Erwartungswert

$$E[X] = X_S(p^u u + p^d d) + X_B.$$

Für die Varianz eines Portfolios gilt dann

$$\text{Var}[X] = (X_S)^2 p^u p^d (u - d)^2.$$

Wir beginnen mit der Bestimmung der Nachfrage des ersten Investors. Sein Maximierungsproblem nach Steuern lautet wie folgt

$$\max_{p(X^1)=p(\bar{X}^1)} E[(1-\tau)X^1 + \tau p(X^1)] - a \text{Var}[(1-\tau)X^1 + \tau p(X^1)].$$

Setzen wir die uns bekannten Größen ein, so ergibt sich

$$\max_{p(X^1)=p(\bar{X}^1)} (1-\tau) \left(X_S^1 (p^u u + p^d d) + X_B^1 \right) + \tau p(X^1) - a(1-\tau)^2 (X_S^1)^2 p^u p^d (u-d)^2.$$

Wenden wir uns nun der Nebenbedingung zu. Hier sind die Preise beider Titel oder aber die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Einer einfachen Rechnung wegen werden wir zuerst die Preise eines Unternehmensanteils bestimmen und daraus Rückschlüsse auf die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ziehen. Da der Bond einen Preis von eins hat (wegen $r_f = 0$), bezeichnen wir vorerst den Preis eines Unternehmensanteils mit q und haben daher

$$p(X) = X_S q,$$

Damit schreibt sich die Nebenbedingung des Investors einfacher als

$$\begin{aligned} p(X^1) &= p(\bar{X}^1) \\ X_S^1 q + X_B^1 &= 1. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Nebenbedingung in das Maximierungsproblem des ersten Investor ein, so ergibt sich endlich

$$\max_{X_S^1} (1-\tau) \left(X_S^1 (p^u u + p^d d - q) + 1 \right) + \tau - a(1-\tau)^2 (X_S^1)^2 p^u p^d (u-d)^2.$$

Dieses Maximierungsproblem führt endlich auf die Lösung

$$X_S^1 = \frac{p^u u + p^d d - q}{2a(1-\tau)p^u p^d (u-d)^2}, \quad X_B^1 = 1 - X_S^1 q.$$

Analog ermitteln wir die Nachfrage des zweiten Investors und erhalten

$$X_S^2 = \frac{p^u u + p^d d - q}{2a(1-\tau)p^u p^d (u-d)^2}, \quad X_B^2 = q - X_S^2 q.$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet nun, dass Angebot und Nachfrage übereinstimmen. Also muss die Gesamtnachfrage beider Investoren gerade eine Einheit ergeben und diese Gleichung legt den Preis des Unternehmens fest. Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= X_S^1 + X_S^2 = 2 \frac{p^u u + p^d d - q}{2a(1-\tau)p^u p^d (u-d)^2} \\ q &= p^u u + p^d d - a(1-\tau)p^u p^d (u-d)^2. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung verdeutlicht, dass der Preis des Unternehmensanteils (und die sich daraus ergebenden risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten) vom Parameter a abhängig sind.

Allein durch die Wahl von a sind Preise des Unternehmensanteils von $p^u u + p^d d$ bis null denkbar. Dies sind genau diejenigen Preise, die sich aus den Arbitragerelationen ergeben: der Preis des Unternehmens muss positiv und sollte kleiner als der Erwartungswert der Zahlung sein, damit die Kapitalkosten des Unternehmens größer als der risikolose Zins (in unserem Fall null) werden. Das aber heißt nichts anderes, dass mit Variation des Parameters a auch alle denkbaren risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten möglich sind. Die Idee, die Höhe der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten unter Steuern aus einem Gleichgewicht herzuleiten, versagt.

5.2 Beweis der Gleichung (10)

Aus der Fundamentalannahme folgt der Zusammenhang¹⁷

$$\frac{E_Q[\widetilde{CF}_t]}{(1+r_f)^t} = \frac{E[\widetilde{CF}_t]}{(1+k)^t}. \quad (12)$$

Der Wert des Unternehmens bei Berücksichtigung der Einkommensteuer ergibt sich aus¹⁸

$$V_0 = \sum_{t=1}^T \frac{E_Q[(1-\tau)\widetilde{CF}_t + \tau AfA_t]}{(1+r_f(1-\tau))^t}.$$

Da die Abschreibungen sicher sind, folgt daraus

$$V_0 = \sum_{t=1}^T \frac{(1-\tau)E_Q[\widetilde{CF}_t] + \tau AfA_t}{(1+r_f(1-\tau))^t}.$$

Mit Hilfe von (12) folgt sofort das Ergebnis.

Literatur

- Back, K. & Pliska, S. R. (1991), 'On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space', *Journal of Mathematical Economics* **20**, 1–18.
- Brealey, R. A. & Myers, S. C. (2000), *Principles of Corporate Finance*, 6. edn, McGraw-Hill, New York.
- Breuer, W. (2000), *Investition I: Entscheidungen bei Sicherheit*, Gabler, Wiesbaden.
- Copeland, T. E. & Weston, J. F. (1988), *Financial Theory and Corporate Policy*, 3 edn, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Franke, G. & Hax, H. (1999), *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, 4. edn, Springer, Berlin.
- Harrison, J. M. & Kreps, D. M. (1979), 'Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets', *Journal of Economic Theory* **20**, 381–408.

¹⁷Zum Beweis siehe Kruschwitz & Löffler (2002, Satz 2.3).

¹⁸Siehe dazu Löffler & Schneider (2002, Satz 2).

- Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland, ed. (1998), *Handbuch für Rechnungslegung, Prüfung und Beratung*, Vol. II, 11. edn, IdW-Verlag, Düsseldorf.
- Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland (2000), 'Idw standard: Grundsätze zur durchführung von unternehmensbewertungen (idw s1) (stand: 28.6.2000)', *Die Wirtschaftsprüfung* 53, 825-842.
- Johansson, S. E. (1969), 'Income taxes and investment decisions', *Swedish Journal of Economics* 71, 103-110.
- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (1998), 'Unendliche probleme bei der unternehmensbewertung', *Der Betrieb* 51, 1041-1043.
- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2002), Dcf, Discussion Paper Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, 265, Universität Hannover.
- Kruschwitz, L. (2002a), *Finanzierung und Investition*, 3. edn, Oldenbourg, München, Wien.
- Kruschwitz, L. (2002b), *Investitionsrechnung*, 9. edn, Oldenbourg, München, Wien.
- Laitenberger, J. (2000), 'Die berücksichtigung von kursgewinnen bei der unternehmensbewertung', *FinanzBetrieb* 2, 546-550.
- Löffler, A. & Schneider, D. (2002), Martingales, taxes, and neutrality, Discussion Paper 269, Universität Hannover.
- Löffler, A. (2001), 'Besteuerung von kursgewinnen und dividenden in der unternehmensbewertung', *FinanzBetrieb* 3, 593-594.
- Magill, M. & Quinzii, M. (1996), *Theory of Incomplete Markets*, MIT Press, Cambridge.
- Neus, W. (2001), *Einführung in die Betriebswirtschaftslehre aus institutionenökonomischer Sicht*, 2. edn, Mohr Siebeck, Tübingen.
- Ollmann, M. & Richter, F. (1999), Kapitalmarktorientierte unternehmensbewertung und einkommensteuer: eine deutsche perspektive im kontext internationaler praxis, in H.-J. Kleineidam, ed., 'Unternehmenspolitik und Internationale Besteuerung. Festschrift für Lutz Fischer', Erich Schmidt, Berlin, pp. 159-178.
- Ross, S. A., Westerfield, R. W. & Jaffe, J. F. (1996), *Corporate Finance*, 4. edn, Irwin, Chicago.
- Schierenbeck, H. (2000), *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*, 15 edn, Oldenbourg, München, Wien.
- Siepe, G. (1997), 'Die berücksichtigung von ertragsteuern bei der unternehmensbewertung', *Die Wirtschaftsprüfung* 50, 1-10 und 37-44.

Wie reagieren im Rahmen des CAPM Kapitalkosten auf steigende Steuersätze ?

Jörg Laitenberger

Universität Hannover

Workshop Unternehmensbewertung

28. Juni 2003

Agenda

- Kapitalkosten mit dem CAPM
- Dividendenbesteuerung
- Simulationsergebnisse

CAPM ohne Steuern

$$E[\tilde{r}_j] = r_f + \lambda \text{Cov}[\tilde{r}_j, \tilde{r}_M]$$

wobei

- \tilde{r}_j Rendite von Wertpapier j
- \tilde{r}_M Rendite des Marktportfolios
- r_f risikoloser Zins
- $\lambda = \frac{E[\tilde{r}_M] - r_f}{\sigma_M^2}$ Marktpreis des Risikos

Unternehmensbewertung

$$\tilde{V}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}_t[\widetilde{CF}_{t+i}]}{(1+k)^i}$$

wobei $k = \mathbf{E}[\tilde{r}_j]$ als konstant und bekannt angenommen wird.

Was passiert bei Einführung einer Steuer auf Dividenden s , die Kursgewinne steuerfrei läßt ?

Die \widetilde{CF}_t werden um den Faktor $(1 - s)$ gekürzt.

Die Kapitalkosten k müssen an die Nachsteuerwelt angepasst werden.

Cashflow–Bewegungsgleichung

Problem: Wie verändert sich $\tilde{r}_j = \frac{\widetilde{CF}_t(1-s) + \tilde{V}_t}{\tilde{V}_{t-1}} - 1$?

Keine allgemeine Aussage möglich (siehe Löffler).

Deshalb: Einschränkung der Menge der betrachteten Investitionsprojekte auf solche, für die die Bewegungsgleichung

$$\widetilde{CF}_{t+1} = \widetilde{CF}_t(1 + g)(1 + \tilde{\epsilon})$$

gilt, wobei

- g bekannter und konstanter Wachstumsfaktor, und
- $\tilde{\epsilon}$ iid Störterm mit $E[\tilde{\epsilon}] = 0$.

Bewertungsgleichungen

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[\widetilde{CF}_{t+i}](1-s)}{(1+k_s)^i} \\ &= \widetilde{CF}_t(1-s) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1+g)^i}{(1+k_s)^i} \\ &= \widetilde{CF}_t(1-s) \frac{1+g}{k_s-g}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V}_{t+1} = \tilde{V}_t(1+g)(1+\tilde{\epsilon})$$

und demnach

$$\begin{aligned}1 + \tilde{r}_j &= \frac{\widetilde{CF}_{t+1}(1-s) + \tilde{V}_{t+1}}{\tilde{V}_t} \\ &= (1+g)(1+\tilde{\epsilon}) \frac{(1-s)\widetilde{CF}_t}{\tilde{V}_t} + \frac{\tilde{V}_{t+1}}{\tilde{V}_t} \\ &= (k_s-g)(1+\tilde{\epsilon}) + (1+g)(1+\tilde{\epsilon}) \\ &= (1+k_s)(1+\tilde{\epsilon}).\end{aligned}$$

Zwischenergebnisse

- Erwartete Kursgewinne in Höhe von g sind unabhängig von der Besteuerung.
- Das Risiko der Rendite wird vollständig durch den Störterm $\tilde{\epsilon}$ beschrieben !

Kapitalkosten nach Steuern

Einsetzen der Renditegleichung in die CAPM-Gleichung führt zu:

$$\begin{aligned}k_s &= r_f + \lambda \text{Cov}[\tilde{r}_j, \tilde{r}_M] \\ &= r_f + \lambda(1 + k_s) \text{Cov}[\tilde{\epsilon}, \tilde{r}_M]\end{aligned}$$

bzw.

$$k_s = \frac{r_f + \lambda \text{Cov}[\tilde{\epsilon}, \tilde{r}_M]}{1 - \lambda \text{Cov}[\tilde{\epsilon}, \tilde{r}_M]}$$

bzw.

$$k_s = \frac{r_f + \lambda(1 + \mathbf{E}[\tilde{r}_M]) \text{Cov}[\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_M]}{1 - \lambda(1 - \mathbf{E}[\tilde{r}_M]) \text{Cov}[\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_M]}$$

wobei $1 + \tilde{r}_M = (1 + \mathbf{E}[\tilde{r}_M])(1 + \tilde{\epsilon}_M)$.

D.h. die Nachsteuerkapitalkosten k_s werden von der Steuer s nur mittelbar über den Steuereinfluß auf r_f , λ und \tilde{r}_M beeinflußt.

Keine allgemeine Aussage über $\frac{dk_s}{ds}$ möglich, da abhängig von $\frac{dr_f}{ds}$, $\frac{d\lambda}{ds}$ und $\frac{dE[\tilde{r}_M]}{ds}$.

Simulationsergebnisse

Annahmen:

- r_f nach Steuern ist gleich $r_f(1 - s)$.
- $E[\tilde{r}_M] > r_f$ und $E[\tilde{r}_M]$ nach Steuern ist gleich $E[\tilde{r}_M](1 - \alpha s)$ mit $\alpha < 1$.
- Einwirkung von Steuern auf λ unbestimmt. Es werden sowohl steigende als auch fallende Ableitungen betrachtet.

Simulationsergebnisse

Bsp. mit $r_f = 4\%$, $E[\tilde{r}_M] = 8\%$, λ vor Steuern = 1. In der Tabelle ist das Verhältnis $\frac{k_s \text{ vor Steuern}}{k_s \text{ nach Steuern}}$ in Abhängigkeit von λ nach Steuern und $\text{Cov}[\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_M]$ abgetragen.

	0,84	0,94	1,04	1,13
2%	1,64	1,54	1,47	1,39
3%	1,56	1,46	1,36	1,28
4%	1,51	1,40	1,30	1,21
5%	1,48	1,35	1,25	1,16

Ergebnisse:

- k_s fällt mit steigendem Steuersatz.
- Mit höherer Korrelation (höherem β) sinkt die Abhängigkeit vom Steuersatz.
- Mit höherem λ sinkt die Abhängigkeit vom Steuersatz.

Jörg Wiese*

Bedingungen für die Irrelevanz persönlicher Steuern im
Capital Asset Pricing Model mit deutschem Steuersystem



2003-03

20. Mai 2003

– überarbeitete Version vom 26.06.2003 –

Abstract

Investors maximize income after taxes. No matter if they acquire single securities or entire corporations they have to consider personal taxes. In the paper conditions for the irrelevance of differential personal taxes in the Capital Asset Pricing Model are derived. We show that a very specific linear relationship between the dividend yield and the expected rate of return on each portfolio has to hold. Only in this special case investors choose the same portfolios on a before-tax and after-tax basis. The analysis is based on prior works by *Long* and *König*, but accounts for recent changes in the German tax code: It includes the German “Halbeinkünfteverfahren” (a procedure whereby taxable income is halved for purposes of dividend taxation) as well as recently discussed proposals to introduce proportional taxes on income from a riskless security and capital gains. Finally, results are interpreted and reviewed with respect to empirical findings.

Keywords: valuation; Capital Asset Pricing Model (CAPM); differential personal taxes; Unternehmensbewertung; Capital Asset Pricing Model (CAPM); differenzierte persönliche Steuern

JEL-Classification: G11, H24

Inhalt

1. Problemstellung	1
2. Äquivalenzbedingungen für die Effizienz von Portfolios vor und nach Steuern: Die Analyse von <i>Long</i>.....	2
2.1 Steuersystem und effiziente Portfolios	2
2.2 Keine risikolose Anlagemöglichkeit	3
2.3 Existenz einer risikolosen Anlagemöglichkeit	4
3. Äquivalenzbedingungen unter deutschen steuerlichen Verhältnissen	4
3.1 Anpassungen an das deutsche Steuersystem	4
3.2 Äquivalenzbedingungen	7
3.2.1 Eigenschaften effizienter Portfolios	7
3.2.2 Keine risikolose Anlagemöglichkeit	9
3.2.3 Existenz einer risikolosen Anlagemöglichkeit	11
3.3 Diskussion	14
3.3.1 Implikationen der Äquivalenzbedingungen.....	14
3.3.2 Empirische Resultate	16
3.3.3 Konsequenzen für die Unternehmensbewertung.....	17
4. Thesenförmige Zusammenfassung.....	18
Anhang 1 zu Abschnitt 3.2.1	19
Anhang 2 zu Abschnitt 3.2.2	23
Anhang 3 zu Abschnitt 3.2.3	27
Literaturverzeichnis	32

1. Problemstellung

Die Ermittlung von Unternehmenswerten erfordert zum einen, dass jede der Komponenten des Zinsfußes *für sich* theoretisch fundiert abgeleitet wird. Zum anderen müssen diese Elemente und die mit ihnen verbundenen expliziten und impliziten Annahmen *im System* miteinander kompatibel sein. Letzterem Aspekt widmet sich der vorliegende Beitrag.

Persönliche Steuern dürfen im Rahmen von Investitionsentscheidungen grundsätzlich nicht vernachlässigt werden.¹ Von Interesse sind daher Ausnahmen von diesem Grundsatz. Erarbeitet werden Irrelevanzbedingungen für die Existenz von differenzierten persönlichen Steuern auf Dividenden, Kursgewinne sowie Zinseinkünfte im Standard-CAPM. Derartige Bedingungen wurden von *Long* für das Mitte der 1970er Jahre geltende amerikanische und darauf aufbauend von *König* für das deutsche Steuersystem erarbeitet.² Für das Halbeinkünfteverfahren und die seit jüngster Zeit vorgesehenen Veränderungen im deutschen Steuerrecht – die Besteuerung von Kursgewinnen und die Abgeltungsteuer auf Zinseinkünfte – fehlt eine derartige Ausarbeitung. Sie soll hier geleistet werden. Die Analyse erscheint relevant, da sie Antworten auf die Frage gibt, unter welchen Umständen man im Umfeld eines relativ realitätsnahen Steuersystems auf die explizite Erfassung von Steuern³ im Zinsfuß verzichten, also mit dem Standard-CAPM rechnen darf. Gezeigt wird, dass dafür eine spezifische lineare Beziehung zwischen der Aktien- und der Dividendenrendite herrschen muss.⁴

Im Anschluss daran gilt es, die Implikationen der erarbeiteten Irrelevanzbedingungen über einen intuitiven Zugang zu näher untersuchen und ihre Konsequenzen für die Unternehmensbewertung aufzuzeigen. Daneben sind sie anhand vorliegender empirischer Untersuchungen auf ihre Realitätsnähe zu prüfen.

Im Folgenden wird von der Integration der Kirchensteuer in den Kalkül abgesehen.⁵ Vorausgesetzt wird, dass die Akteure sie vermeiden.⁶

¹ Vgl. *Ballwieser* [Steuern, 1995], S. 36.

² Vgl. *Long* [Taxation, 1977], S. 25-53; *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 63-87.

³ Betrachtet werden allein Steuerarten, die im CAPM, also bei einer Alternativanlage in Wertpapiere mit unsicheren Renditen relevant sind. Vgl. *Moxter* [Grundsätze, 1983], S. 178; *Ballwieser* [Fragen, 2002], S. 748.

⁴ Andere Wege zur Irrelevanz eröffnen sich, wenn man von gleichen Steuersätzen auf Dividenden und Kursgewinne oder bestimmten Annahmen über die Renditen des Investitionsobjekts und der Alternative ausgeht. Vgl. *Richter* [Taxes, 2002]. Daneben lässt sich Steuernneutralität erreichen, indem man das Steuersystem durch Wahl geeigneter Bemessungsgrundlagen oder Abschreibungsmuster gestaltet. Vgl. dazu *König* [Wurzel, 1997] für konstante und *Löffler* [Steuersysteme, 1999] für intertemporal veränderliche Steuersätze.

⁵ Vgl. dazu *Kruschwitz* [Investitionsrechnung, 2003], S. 115.

⁶ Vernachlässigt man Details, so wirkt die Kirchensteuer wie der Solidaritätszuschlag, der im Folgenden im Modell berücksichtigt wird.

2. Äquivalenzbedingungen für die Effizienz von Portfolios vor und nach Steuern: Die Analyse von Long

2.1 Steuersystem und effiziente Portfolios

Unter der Annahme, dass Investoren ihr Einkommen *nach* Steuern maximieren⁷, ist Long⁸ der Frage nachgegangen, unter welchen Bedingungen Akteure, die entsprechend des (Standard-) CAPM entscheiden, nach Steuern optimale Portfolios auswählen. Er analysiert, inwieweit Portfolios, die $\mu - \sigma$ -effizient vor Steuern sind, diese Eigenschaft behalten, wenn die Investoren über differenzierte Steuersätze auf Kursgewinne γ und Dividendeneinkünfte τ verfügen.⁹ Neben den Prämissen, die zum CAPM vor Steuern führen, geht Long von einer deterministischen¹⁰ Dividendenrendite δ_j und einer stochastischen Kursrendite \tilde{p}_j vor Steuern auf das Wertpapier j ($j = 1, \dots, N$) aus. Bezeichnet \bar{p}_j den Erwartungswert von \tilde{p}_j , so ergibt sich die erwartete gesamte Rendite nach Steuern \bar{r}'_j als¹¹

$$\bar{r}'_j = (1 - \gamma)\bar{p}_j - (\tau - \gamma)\delta_j \quad (2.1)$$

mit der Varianz $(1 - \gamma)^2 \cdot \sigma_j^2$. Die Steuersätze γ und τ sind annahmegemäß unabhängig von der Höhe der Kursgewinne und der Dividenden.¹² Existiert zusätzlich eine Anlagemöglichkeit zum risikolosen Zinssatz r , so wird diese mit dem Steuersatz τ auf Dividenden belastet.

Die Menge aller vor (nach) Abzug von Steuern effizienten Portfolios wird als $E(F(\gamma, \tau))$ bezeichnet. Existiert r , so halten die Investoren eine Kombination aus dem risikolosen Papier und dem Nachsteuer-Tangentialportfolio $T(\gamma, \tau)$.¹³ Ein Portfolio ist *nachsteuer*-effizient bei gegebenen Steuersätzen γ, τ , wenn es (a) die maximale erwartete Rendite unter den Portfolios mit gleicher oder niedrigerer Varianz hat und es (b) die kleinste Varianz unter allen Portfolios mit gleicher oder höherer erwarteter Rendite hat. Als effizient *vor Steuern* lässt sich ein Portfolio kennzeichnen, das *nachsteuer*-effizient bei den Steuersätzen $\gamma = \tau = 0$ ist.¹⁴

⁷ Vgl. u.a. *Litzenberger / Ramaswamy* [Effect, 1979], S. 164; *Brennan* [Valuation, 1970], S. 419-420, der diese Annahme nur für den Fall als gerechtfertigt ansieht, dass die Investoren ihre Wertpapiere bis zum Periodende halten. Dies jedoch ist bereits eine Prämisse des CAPM.

⁸ Vgl. Long [Taxation, 1977], S. 25-53.

⁹ Im Allgemeinen gilt dies nicht, da investorenspezifische Steuersätze trotz homogenen Erwartungen über die Bruttorenditen zu verschiedenen Nettopositionen der Akteure führen. Vgl. *Weigel* [Steuern, 1989], S. 115.

¹⁰ Vgl. analog *Brennan* [Valuation, 1970], S. 420; *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 68.

¹¹ Vgl. Long [Taxation, 1977], S. 28. Wie aus (2.1) ersichtlich, geht Long – abweichend vom deutschen Steuergesetz – von der Anrechenbarkeit der auf Dividenden zu zahlenden Kursgewinnsteuern aus.

¹² Zur Erweiterung um progressive Steuern vgl. Long [Taxation, 1977], S. 51-53.

¹³ Vgl. Long [Taxation, 1977], S. 29.

¹⁴ Vgl. Long [Taxation, 1977], S. 28; *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 65-66.

2.2 Keine risikolose Anlagemöglichkeit

Während die Ordnung von Portfolios nach der Varianz der Renditen unabhängig davon ist, ob Steuern erhoben werden oder nicht, kann die Besteuerung die Reihung der Portfolios nach der erwarteten Rendite verändern. Folglich werden Investoren mit unterschiedlichen Steuersätzen die Portfolios in ihrem Nettokalkül grundsätzlich anders ordnen als vor Steuern. Dies gilt solange, bis folgende Beziehung zwischen der Dividenden- und der Wertpapierrendite besteht:¹⁵

$$F(\gamma, \tau) = E \forall (\gamma, \tau), \quad 0 \leq \gamma \leq k; 0 \leq \tau \leq k; 0 \leq k \leq 1, \quad (2.2)$$

wenn Konstanten c und d existieren, welche die Bedingungen

$$\delta_j = c \cdot \bar{\rho}_j + d, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$\frac{k-1}{k} < c < \frac{1}{k} \quad (2.4)$$

erfüllen. Ist dieser Spezialfall einer linearen Beziehung zwischen der Dividendenrendite δ_j und der Kursrendite $\bar{\rho}_j$ gegeben, so ist die Ordnung der Portfolios nach der erwarteten Rendite bei allen Steuersätzen gleich. Der Parameter k kennzeichnet die Teilmenge jener Investoren, deren maximaler Steuersatz (γ oder τ) ein gegebenes k nicht überschreitet:

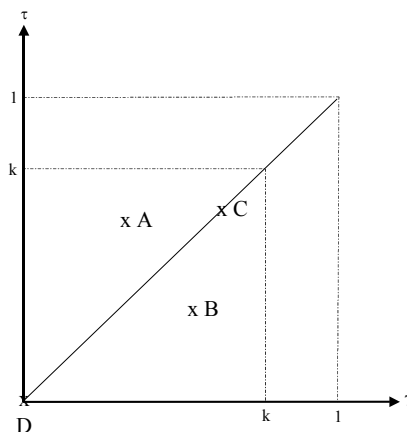


Abbildung 1:¹⁶ Untergruppe von Investoren mit Steuersätzen $\gamma, \tau \leq k$

Investoren mit niedrigeren (höheren) Steuersätzen auf Kursgewinne als auf Dividenden liegen etwa auf Punkt A (B). Akteure, deren Dividenden und Kursgewinne steuerlich gleich behandelt werden, befinden sich auf der 45 Grad-Linie, also etwa in Punkt C. Wirtschaftssubjekte, die von beiden Steuerarten befreit sind, halten sich im Ursprung D auf.

¹⁵ Vgl. Long [Taxation, 1977], S. 31.

¹⁶ In Anlehnung an Long [Taxation, 1977], S. 31.

Gelten die Bedingungen (2.3) und (2.4) für jedes einzelne Wertpapier j , so ergibt sich für das Kapitalmarktgleichgewicht:¹⁷

$$\bar{\rho}_j = \bar{\rho}_Z + \beta_j \cdot (\bar{\rho}_M - \bar{\rho}_Z), \quad j = 1, \dots, N; \bar{\rho}_M > \bar{\rho}_Z; \beta_j = \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2}. \quad (2.5)$$

Dabei gibt $\bar{\rho}_M$ den Renditeerwartungswert des Marktportfolios vor Steuern an, $\bar{\rho}_Z$ entspricht der erwarteten Bruttorendite jedes Portfolios Z , dessen Rückflüsse unkorreliert mit dem Marktportfolio sind. Es resultiert mithin – obgleich differenzierte Steuern vorliegen – das Standard-CAPM ohne risikolose Anlageform.¹⁸

2.3 Existenz einer risikolosen Anlagemöglichkeit

Existiert eine risikolose Anlagemöglichkeit r , so sind die Äquivalenzbedingungen (2.2) und (2.3) durch die Forderungen¹⁹

$$T(\gamma, \tau) = T(0, 0) \quad \forall (\gamma, \tau), \quad 0 \leq \gamma \leq k; 0 \leq \tau \leq k; 0 \leq k \leq 1, \quad (2.6)$$

$$\delta_j = c \cdot (\bar{\rho}_j - r) + r, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

zu ersetzen. (2.4) bleibt von der Einführung von r unberührt. Sofern jeder Investor eine Kombination des risikolosen Wertpapiers mit $T(\gamma, \tau)$ hält und sofern (2.7) erfüllt ist, gilt im Kapitalmarktgleichgewicht analog zu (2.5):²⁰

$$\bar{\rho}_j = r + \beta_j \cdot (\bar{\rho}_M - r), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Man erhält die Grundform des CAPM mit risikoloser Anlage.²¹ Der folgende Abschnitt überführt die Beziehungen (2.2) bis (2.8) in das deutsche Steuerregime.

3. Äquivalenzbedingungen unter deutschen steuerlichen Verhältnissen

3.1 Anpassungen an das deutsche Steuersystem

Möchte man die Überlegungen *Longs* auf die deutschen steuerlichen Verhältnisse übertragen, so bedarf es einiger Konkretisierungen. Mit Blick auf den Steuersatz τ auf Dividenden D ist zu beachten, dass entsprechend des Halbeinkünfteverfahrens die halbe Bardividende mit dem

¹⁷ Vgl. *Long* [Taxation, 1977], S. 32-33.

¹⁸ Vgl. grundlegend *Black* [Equilibrium, 1972], S. 450.

¹⁹ Vgl. *Long* [Taxation, 1977], S. 34.

²⁰ Vgl. *Long* [Taxation, 1977], S. 35.

²¹ Vgl. *Black* [Equilibrium, 1972], S. 444 und S. 450. Um (2.8) zu gewinnen, ist $\bar{\rho}_Z$ in (2.5) durch r zu ersetzen.

persönlichen Einkommensteuersatz s_e belastet wird, wobei D_t dem ausgeschütteten körperschaftsteuerlichen Gewinn $G_{k,t}$ nach Abzug der Körperschaftsteuer (Körperschaftsteuersatz $s_{KSt} = 0,25$) entspricht.²² Als Steuerlast resultiert dann:

$$\tau \cdot D_t = s_e \cdot 0,5 \cdot [G_{k,t} \cdot (1 - s_{KSt})] = 0,5 \cdot s_e \cdot [0,75 \cdot G_{k,t}]. \quad (3.1)$$

Damit gilt für die Dividendenrendite nach Steuern:²³

$$(1 - \tau) \cdot \delta_j = (1 - 0,5 \cdot s_e) \cdot \delta_j. \quad (3.2)$$

Kursgewinne werden *pauschal* mit einem Steuersatz von 7,5 % belastet²⁴, weshalb die erwartete Nachsteuer-Kursrendite

$$(1 - \gamma) \cdot \bar{p}_j = (1 - 0,075) \cdot \bar{p}_j = 0,925 \cdot \bar{p}_j \quad (3.3)$$

ist. Berücksichtigt man den Solidaritätszuschlag, so erhält man beim gegenwärtig geltenden Zuschlagssatz in Höhe von 5,5 % für die gesamte Rendite nach Steuern:

$$\begin{aligned} \bar{r}_j &= (1 - 0,5 \cdot s_e \cdot 1,055) \cdot \delta_j + (1 - 0,075 \cdot 1,055) \cdot \bar{p}_j \\ &= (1 - 0,5275 \cdot s_e) \cdot \delta_j + (1 - 0,079125) \cdot \bar{p}_j \\ &= (1 - \hat{\tau}) \cdot \delta_j + (1 - \hat{\gamma}) \cdot \bar{p}_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bei $\hat{\tau}$ sowie $\hat{\gamma}$ handelt es sich um die effektiven Steuersätze nach geltendem sowie geplantem deutschen Steuergesetz. Die Pauschalbesteuerung ist mittlerweile im Vermittlungsausschuss beraten worden, der dem Bundestag ihre Ablehnung empfiehlt.²⁵ Im Weiteren wird sie dennoch im Kalkül für den Fall erfasst, dass sie zu geltendem Recht wird. Parallel dazu ist eine Fallunterscheidung zur Berücksichtigung der gültigen Rechtslage vorzunehmen. Die Investoren bleiben steuerfrei, indem sie ihre Papiere länger als ein Jahr halten oder mit ihren Zinseinkünften unter dem Freibetrag von 512€ bleiben.

²² Vorausgesetzt wird Vollausschüttung. Anderes ist im einperiodigen CAPM nicht sinnvoll.

²³ Eine Anrechenbarkeit von Kursgewinnsteuern auf Dividenden sieht das deutsche Steuerregime – im Gegensatz zu Long in (2.1) – nicht vor.

²⁴ Die bisher geltende Spekulationsfrist für Kursgewinne soll im Rahmen des Steuervergünstigungsabbaugesetzes abgeschafft werden. Abgesehen wird hier vom Freibetrag auf Spekulationsgewinne, der auf 1000€ erhöht werden soll, sowie von der Pauschalisierungsregelung für „Altfälle“. Der Steuersatz in Höhe von 7,5 % resultiert aus dem vorgesehenen Pauschalsatz in Höhe von 15 %, wobei das Halbeinkünfteverfahren Anwendung findet. Vgl. *Bundesministerium der Finanzen* (Hrsg.) [Steuervergünstigungsabbaugesetz, 2003], S. 3-4.

²⁵ Vgl. *Deutscher Bundestag* [Beschlussempfehlung, 2003], S. 2.

Existiert weiterhin eine risikofreie Anlagemöglichkeit, so sollen Einkünfte aus ihr künftig einer pauschalen Abgeltungsteuer mit einem Steuersatz s_a in Höhe von 25 % unterliegen. Hinzuzurechnen ist der Solidaritätszuschlag.²⁶ Für diesen Fall ist (3.4) um den Summanden

$$[1 - s_a \cdot 1,055] \cdot r = [1 - 0,26375] \cdot r = (1 - \hat{s}_a) \cdot r \quad (3.5)$$

zu erweitern.²⁷ Die Abgeltungssteuer stellt einen weiteren Unterschied zur Analyse von *Long* dar, der eine Besteuerung von r mit dem Dividendensteuersatz τ vorsieht. Abbildung 2 bündelt das hier zugrundegelegte deutsche Steuersystem:

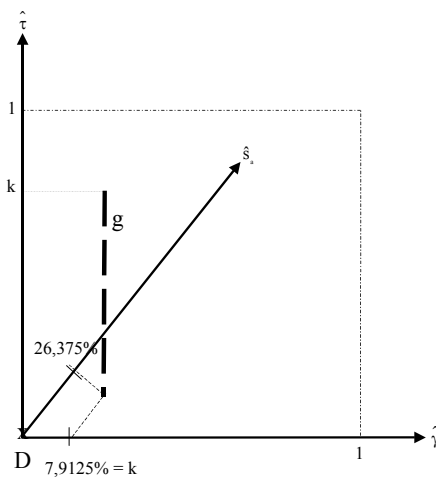


Abbildung 2:²⁸ Deutsches Steuersystem

Ersichtlich ist, dass bei progressiver Besteuerung allein die Dividenden investorenspezifisch belastet werden. Verglichen mit Übersicht 1 gibt Abbildung 2 folglich mit Blick auf die Steuersätze $\hat{\gamma}$ und $\hat{\tau}$ einen Spezialfall wieder: Aufgrund der pauschalen Besteuerung der Zinserträge und Kursgewinne können sich die Akteure – in Abhängigkeit ihrer individuellen Steuersätze auf Dividenden – allein auf der Linie g bewegen. Im Modell *Longs* konnten sie dies in der durch γ und τ aufgespannten Ebene. Demgegenüber befindet man sich im deutschen Steuersystem bei Existenz der risikolosen Anlagemöglichkeit r im dreidimensionalen Raum, da r – anders als bei *Long* – mit einem anderen Steuersatz als τ belastet wird.

²⁶ Vgl. *Bundesregierung* [Zinsbesteuerung, 2003], S. 11. Dass der Solidaritätszuschlag aufzuschlagen ist, ergibt sich nur aus der Begründung des Referentenentwurfs. Der Gesetzentwurf enthält keinen Hinweis darauf.

²⁷ Freibeträge werden vernachlässigt.

²⁸ Quelle: eigene Darstellung.

3.2 Äquivalenzbedingungen

3.2.1 Eigenschaften effizienter Portfolios

Um die Bedingungen zu gewinnen, unter denen die differenzierte Besteuerung von Kursgewinnen und Dividenden keinen Einfluss auf die Effizienzeigenschaft von Portfolios hat, bedarf es einer Definition effizienter Portfolios vor und nach Steuern.²⁹ Existieren N Anlagemöglichkeiten, so lässt sich ein Portfolio durch einen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ aus der Menge aller Portfolios PORT_N kennzeichnen, der die Eigenschaft

$$x_1 + \dots + x_N = \sum_{j=1}^N x_j = \underline{x}^T \cdot \mathbf{I} = 1 \quad (3.6)$$

aufweist. Ein solches Portfolio ist – wenn keine risikolose Anlageform r existiert – genau dann effizient vor Steuern, wenn³⁰

$$\text{Min}_{\underline{x}} \underline{x}^T \underline{\Sigma} \underline{x} \quad (3.7)$$

unter Beachtung von

$$\underline{x}^T \underline{\bar{p}} + \underline{x}^T \underline{\delta} = m (> m_0), \quad \underline{x}^T \mathbf{I} = 1 \quad (3.8)$$

gelöst ist. $\underline{\Sigma}$ steht für die (nicht-singuläre) Kovarianzmatrix der Aktienrenditen, m_0 für die erwartete Rendite des Minimum-Varianz-Portfolios, m für die gegebene Rendite eines Portfolios \underline{x}_m und \mathbf{I} für den Einservektor. Ist r vorhanden, dann ist das Portfolio $(\underline{x}, x_r) \in \text{PORT}_{N+1}$ effizient, wenn neben (3.7) gilt:

$$\underline{x}^T \underline{\bar{p}} + \underline{x}^T \underline{\delta} + x_r \cdot r = m (> r), \quad \underline{x}^T \mathbf{I} + x_r = 1. \quad (3.9)$$

Um den Einfluss der Besteuerung auf die Renditen der Portfolios zu bestimmen³¹, wird ein Portfolio $(\underline{x}, x_r) \in \text{PORT}_{N+1}$ betrachtet, das bei Fehlen von r über $x_r = 0$ zu $\underline{x} \in \text{PORT}_N$ wird. Ein Investor verfügt zum Periodenbeginn über ein Vermögen W , das er in Aktien investieren kann. Bezeichnet P_{j0} den Kurs der Aktie j am Periodenanfang, so hält der Akteur $(x_j \cdot W) / P_{j0}$ riskante Wertpapiere des Typs j . Aus dem Portfolio fließt ein Einkommen H mit

²⁹ Vgl. hierzu und im Folgenden *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 58 und S. 63-67; *Long* [Taxation, 1977], S. 45-46; *Chen* [Rules, 1986], S. 7.

³⁰ Vgl. z.B. *Black* [Equilibrium, 1972], S. 447, für den Fall ohne Steuern.

³¹ Vgl. hierzu und im Folgenden *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 67-73.

$$\begin{aligned}
H &= W \cdot x_r \cdot r + \sum_{j=1}^N \frac{x_j \cdot W}{P_{j0}} \cdot (P_{j1} - P_{j0} + D_j) \\
&= W \cdot \left(\sum_{j=1}^N x_j \cdot (\tilde{\rho}_j + \delta_j) + x_r \cdot r \right) \\
&= W \cdot (\underline{x}^T \cdot \underline{\rho} + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} + x_r \cdot r)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Addiert man zu H das (unabhängig von Kapitalmarkttransaktionen anfallende) deterministische Basiseinkommen EK, gelangt man zum gesamten zu versteuernden Einkommen ZVE:³²

$$ZVE = W \cdot (\underline{x}^T \cdot \underline{\rho} + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} + x_r \cdot r) + EK. \tag{3.11}$$

Für das ZVE nach Steuern, ZVE' , resultiert aus (3.11), (3.4) und (3.5)

$$ZVE' = W \cdot (\underline{x}^T \cdot \underline{\rho} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) + x_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a)) + EK \cdot (1 - s_e) \tag{3.12}$$

und mit den konkret vorausgesetzten Steuersätzen

$$ZVE' = W \cdot (0,920875 \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\rho} + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - 0,5275 \cdot s_e) + 0,73625 \cdot x_r \cdot r) + EK \cdot (1 - s_e). \tag{3.13}$$

Aus (3.12) lässt sich die Portfoliorendite nach Steuern r' auf das eingesetzte Kapital W mit

$$r' = \frac{ZVE'}{W} = \underline{x}^T \cdot \underline{\rho} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) + x_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) \tag{3.14}$$

gewinnen. Ihr Erwartungswert \bar{r}' beträgt

$$\bar{r}' = \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{\rho}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{\delta}} \cdot (1 - \hat{\tau}) + x_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) \tag{3.15}$$

und ihre Varianz $\sigma_{r'}^2$ ³³

$$\sigma_{r'}^2 = \underline{x}^T \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2. \tag{3.16}$$

Um die effizienten Portfolios nach Steuern zu ermitteln, braucht man die partiellen Ableitungen von \bar{r}' und $\sigma_{r'}^2$ nach \underline{x} und x_r .³⁴ Für (3.15) resultieren

³² Zu ZVE gehören mithin – anders als bei *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 70 – auch Kursgewinne, ausgedrückt durch $\underline{x}^T \cdot \underline{\rho}$.

³³ Der Term $(1 - \hat{\gamma})^2 = (0,920875)^2$ tritt bei *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 71, nicht auf, da dort Kursgewinne als steuerfrei angenommen werden. Für einen Ansatz mit Kursgewinnsteuern vgl. *Chen* [Rules, 1986], S. 7-11. Zur Ermittlung der Varianz in (3.16) vgl. den Anhang.

³⁴ Vgl. *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 71.

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial \underline{x}} = \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) \quad (3.17)$$

und

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial x_r} = r \cdot (1 - \hat{s}_a). \quad (3.18)$$

Differentiation von (3.16) liefert³⁵

$$\frac{\partial \sigma_{\bar{r}'}^2}{\partial \underline{x}} = 2 \cdot \underline{\mathcal{Z}} \cdot \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2. \quad (3.19)$$

Das betrachtete Portfolio ist demzufolge – ohne Existenz der risikolosen Anlage r – nach Steuern effizient, wenn Konstanten z_1 und z_2 vorhanden sind, welche den Anforderungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{Z}} \cdot \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot [\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau})] - z_2 \cdot \mathbf{I} &= 0, \\ \underline{x}^T \bar{r}' &= m' (> m'_0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

genügen.³⁶ Die analoge Formulierung zu (3.20) bei Existenz der risikolosen Anlage r lautet:³⁷

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{Z}} \cdot \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot [\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau})] - z_2 \cdot \mathbf{I} &= 0, \\ z_1 \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) + z_2 &= 0, \\ \underline{x}^T \bar{r}' &= m' (> m_r = r \cdot (1 - \hat{s}_a)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Für den Fall, dass Kursgewinne – nach geltendem Recht – unter den genannten Bedingungen steuerfrei bleiben, ist in den Gleichungen (3.11) bis (3.13) der Term $\underline{x}^T \cdot \underline{\rho}$ sowie in den Bedingungen (3.14) bis (3.17), (3.19) bis (3.21) der Parameter $\hat{\gamma}$ gleich 0 zu setzen.³⁸

3.2.2 Keine risikolose Anlagemöglichkeit

Mit Ergebnis (3.20) kann festgestellt werden, unter welchen Bedingungen Portfolios, die effizient vor Steuern sind, diese Eigenschaft auch nach Steuern behalten. Derartige Anforderungen sind erarbeitet worden³⁹ und sollen im Folgenden auf das hier vorliegende Steuersystem

³⁵ Vgl. analog *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 73, der ohne den Faktor $(1 - \hat{\gamma})^2$ rechnet.

³⁶ Vgl. hierzu den Anhang.

³⁷ Vgl. hierzu den Anhang.

³⁸ Entsprechendes gilt für die Nachweise zu Abschnitt 3.2.1 im Anhang.

³⁹ Vgl. *Long* [Taxation, 1977], S. 46-47; *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 74-75; *Chen* [Rules, 1986], S. 12.

übertragen werden. Für die Vorsteuer-Nachsteuereffizienz ist zu fordern, dass folgende *lineare* Beziehung zwischen den Dividenden- und Kursrenditen jedes Portfolios herrscht:⁴⁰

$$\underline{x} \in E \text{ und } \underline{x} \in F(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \Leftrightarrow \underline{\delta} = a \cdot \bar{p} + b \cdot I. \quad (3.22)$$

Die Konstanten a und b bestimmen sich als:⁴¹

$$a = \frac{z_1 - w_1 \cdot (1 - \hat{\gamma})}{w_1 \cdot (1 - \hat{\tau})}, \quad b = \frac{z_2 - w_2}{w_1 \cdot (1 - \hat{\tau})}. \quad (3.23)$$

Sie dürfen indes nicht beliebige Werte annehmen, sondern müssen sich innerhalb gewisser Schranken⁴² bewegen. Für die untere Schranke von a erhalten wir unter der Prämisse *proportionaler* Besteuerung⁴³

$$a > \frac{\hat{\gamma} - 1}{1 - \hat{\tau}}. \quad (3.24)$$

Die Ergebnisse (3.23) und (3.24) weichen von denjenigen *Königs*⁴⁴ ab, was nicht verwundert, da dieser das Anrechnungsverfahren und keine Besteuerung von Kursgewinnen voraussetzt. Dass das Ungleichheitszeichen in (3.24) angebracht ist, sieht man, wenn man es durch ein Gleichheitszeichen ersetzt. Für diesen Fall entspricht die Nachsteuerrendite \bar{r}' auf ein *beliebiges* (auch effizientes) Portfolio im $\mu - \sigma$ -Diagramm einer Parallelen der Form⁴⁵

$$\bar{r}' = b \cdot (1 - \hat{\tau}) \quad (3.25)$$

zur σ -Achse. Dies schließt die ökonomisch unsinnige Möglichkeit ein, dass dieselbe Portfoliorendite mit keinem und zugleich mit unendlichem Risiko verbunden sein kann. Es bleibt zu klären, welche Obergrenze von a einzuhalten ist: Kehrt man in (3.24) das Ungleichheitszeichen um, so bleibt die Vorsteuer-Nachsteuereffizienz erhalten.⁴⁶ Zu beachten ist allein, dass bei Umkehr des Ungleichheitszeichens andere *optimale* Portfolios als \underline{x} ausgewählt werden. Einer Obergrenze für a bedarf es insoweit nicht.⁴⁷

⁴⁰ Vgl. zum Nachweis den Anhang.

⁴¹ Vgl. zum Nachweis den Anhang.

⁴² Vgl. zu den von Long [Taxation, 1977], S. 31, angegebenen Begrenzungen Gleichung (2.4).

⁴³ Vgl. hierzu den Anhang. Folglich entspricht a einer mit steigendem s_e abfallenden linearen Funktion.

⁴⁴ Vgl. König [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 75 und S. 77.

⁴⁵ Vorauszusetzen ist proportionale Besteuerung. Vgl. zum Nachweis den Anhang. Qualitativ das gleiche Ergebnis erzielt König [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 78, allerdings mit einer Geraden anderer Gestalt.

⁴⁶ Vgl. hierzu die Ausführungen im Anhang.

⁴⁷ Vgl. zu einem ähnlichen Ergebnis – allerdings für die Untergrenze von a – und im Widerspruch zu Long [Taxation, 1977], S.46-47, König [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 78. Der Widerspruch zu Long bleibt – erneut für die Obergrenze an Stelle der Untergrenze – mit dem hier gefundenen Ergebnis erhalten.

Für b ergeben sich keinerlei Grenzen.⁴⁸ Allerdings gilt $\delta_j \geq 0$ für sämtliche Wertpapiere j .⁴⁹ Damit folgt unmittelbar aus (3.22) als Untergrenze für b :⁵⁰

$$b \geq -a \cdot \bar{p}_j \quad \forall j. \quad (3.26)$$

Geht man realistischere von *progressiven* Dividendensteuersätzen $\hat{\tau}_x$ und $\hat{\tau}_y$ auf die Portfolios \underline{x} und \underline{y} aus, so gehen die einfachen Anforderungen (3.24) an a und (3.26) an b verloren. Stattdessen müssen a und b *gemeinsam* folgender Bedingung genügen:⁵¹

$$(k_x - k_y) \cdot (1 - \hat{\gamma}) > (k_y \cdot a + b) \cdot (1 - \hat{\tau}_y) - (k_x \cdot a + b) \cdot (1 - \hat{\tau}_x). \quad (3.27)$$

Im Gegensatz zum Fall fehlender Progression sind die Parameter a und b folglich von den jeweils betrachteten Portfolios \underline{x} und \underline{y} abhängig.

Zusammenfassend gilt bei fehlender risikofreier Anlageform, dass vor Steuern effiziente Portfolios auch nach Steuern effizient sind und umgekehrt, sofern die Dividendenrendite gemäß (3.22) eine lineare Funktion der Aktienrendite ist, deren Achsenabschnitt b und Steigungsparameter a bei fehlender (vorhandener) Progression den Anforderungen (3.24) und (3.26) ((3.27)) genügen.⁵² Ist dies erfüllt und halten alle Investoren nachsteuer-effiziente Portfolios, so resultiert im Gleichgewicht mit Beziehung (2.5) die Grundform des CAPM.⁵³

3.2.3 Existenz einer risikolosen Anlagemöglichkeit

Zu erarbeiten bleiben die Äquivalenzbedingungen für den Fall, dass eine risikolose Anlage r vorhanden ist. Die folgende Analyse weicht deutlich von den Arbeiten *Longs* und *Königs* ab, da ersterer eine Zinsbesteuerung zum Dividendensteuersatz τ annimmt, während letzterer den persönlichen Einkommensteuersatz zugrundelegt und steuerfreie Kursgewinne voraussetzt. Ähnlich wie in (3.22) lässt sich als Bedingung für die Vorsteuer-Nachsteuereffizienz beweisen, dass die Dividendenrendite eine lineare Funktion der Kursrendite sein muss:⁵⁴

⁴⁸ Vgl. dazu Gleichung (5.36) im Anhang: Der Parameter b lässt sich stets eliminieren, gleichviel, welche Werte er annimmt.

⁴⁹ Vgl. *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 78. Eventuelle Nachschusspflichten von Gesellschaftern, die man im Modell formal als negative Dividenden berücksichtigen könnte, werden damit vernachlässigt.

⁵⁰ Vgl. *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 78.

⁵¹ Vgl. hierzu und zur Definition der Parameter k_x und k_y den Anhang.

⁵² Vgl. dazu auch *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 79. In einer Situation steuerfreier Kursgewinne ist aus den Gleichungen (3.23), (3.24) sowie (3.27) der Steuersatz $\hat{\gamma}$ zu streichen, ebenso wie in den Ableitungen im Anhang zu Kapitel 3.2.2.

⁵³ Vgl. *Long* [Taxation, 1977], S. 47-48.

⁵⁴ Vgl. *Long* [Taxation, 1977], S. 34; *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 80-81. Ein Nachweis findet sich im Anhang. Die Anforderung (3.28) weicht deutlich von denjenigen *Longs* und *Königs* ab.

$$(\underline{x}, x_r) \in E \text{ und } (\underline{x}, x_r) \in F(\hat{\gamma}, \hat{\tau}, \hat{s}_a) \Leftrightarrow \underline{\delta} = a \cdot (\bar{p} - r \cdot I) + \frac{\hat{\gamma} - \hat{s}_a}{(1 - \hat{\tau})} \cdot r \cdot I. \quad (3.28)$$

Der Parameter a ergibt sich mit⁵⁵

$$a = \frac{z_1 - (1 - \hat{\gamma}) \cdot w_1}{w_1 \cdot (1 - \hat{\tau})}, \quad (3.29)$$

wobei er bei *proportionaler* Besteuerung die gleiche Restriktion (3.24)

$$a > \frac{\hat{\gamma} - 1}{1 - \hat{\tau}} \quad (3.30)$$

wie im Fall ohne risikolose Anlage zu erfüllen hat.⁵⁶ Ersetzt man in (3.30) das Ungleichheits- durch ein Gleichheitszeichen, so erhalte man für die erwartete Nachsteuerrendite \bar{r}' eines Portfolios⁵⁷

$$\bar{r}' = r \cdot (1 - \hat{s}_a), \quad (3.31)$$

was mit Implikationen verbunden ist, die ebenso widersinnig sind wie die in Abschnitt 3.2.2 hinsichtlich der Gleichung (3.25) aufgezeigten. Zu überlegen ist weiterhin, ob a neben der Unter- auch eine Obergrenze einzuhalten hat. Dem ist nicht so.⁵⁸

Es bleibt der im deutschen Steuersystem vorliegende Fall *progressiver* Dividendensteuersätze zu untersuchen. Ähnlich wie in (3.27) kann dann aus (5.56) nicht mehr gefordert werden als:⁵⁹

$$(k_x + g_x) \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}_x)) > (k_y + g_y) \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}_y)). \quad (3.32)$$

Wie in der Situation, in der man nicht risikolos investieren kann, bedarf es zur Herstellung der Vorsteuer-Nachsteuer-Effizienz einer linearen Beziehung zwischen der Dividenden- und Kursrendite. Diese ist von der Gestalt (3.28), wobei der Steigungsparameter a bei proportionaler (progressiver) Besteuerung der Forderung (3.30) ((3.32)) entsprechen muss.⁶⁰ Unter der Annahme, dass alle Investoren effiziente Portfolios nach Steuern halten, resultiert das Gleichgewicht des CAPM gemäß (2.8).

⁵⁵ Vgl. hierzu den Anhang.

⁵⁶ Vgl. zum Nachweis den Anhang. Auch *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 82, und *Long* [Taxation, 1977], S. 34, gelangen jeweils zu gleichen Begrenzungen für a wie bei der Nichtexistenz von r . Die von ihnen abgeleiteten Schranken weichen allerdings von der hier ermittelten ab.

⁵⁷ Vgl. hierzu den Anhang.

⁵⁸ Das in Abschnitt 3.2.2 Gesagte gilt analog. Der Beweis verläuft gleichgerichtet und ist daher entbehrlich.

⁵⁹ Die Variablen g_x und g_y werden im Anhang beim Beweis von Beziehung (3.30) definiert.

⁶⁰ Bei steuerfreien Kursgewinnen ist $\hat{\gamma}$ aus (3.28) bis (3.30) und (3.32) zu streichen. Analoges gilt für den Anhang zu Kapitel 3.2.3.

Es interessiert nun der geometrische Ort der effizienten Portfolios. Vor Steuern entspricht er im $\mu - \sigma$ -Diagramm der Geraden, die durch die Renditen der Portfolios der risikolosen Anlage $\underline{x}_r := (\underline{0}, 1)$ und des Tangentialportfolios $\underline{x}_T := (\underline{x}_M, 0)$ verläuft.⁶¹ Entspricht α ($\alpha \leq 1$) dem risikolos investierten Budgetanteil, lässt sich ein Portfolio \underline{x}_α kennzeichnen mit:⁶²

$$\underline{x}_\alpha = \alpha \cdot \underline{x}_r + (1 - \alpha) \cdot \underline{x}_T, \quad (3.33)$$

$$\underline{x}_\alpha^T \cdot \begin{pmatrix} \bar{p} \\ r \end{pmatrix} = \alpha \cdot r + (1 - \alpha) \cdot \underline{x}_M^T \cdot \bar{p}, \quad (3.34)$$

$$\underline{x}_\alpha^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta} \\ 0 \end{pmatrix} = (1 - \alpha) \cdot \underline{x}_M^T \cdot \underline{\delta}. \quad (3.35)$$

Die erwartete Nachsteuer-Rendite m_α auf das Portfolio lässt sich schreiben als:

$$m_\alpha = \alpha \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) + (1 - \alpha) \cdot \underline{x}_M^T \cdot \bar{p} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + (1 - \alpha) \cdot \underline{x}_M^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}). \quad (3.36)$$

Sollen die effizienten Nachsteuer-Portfolios auf einer Geraden angeordnet sein, müssen sie

$$m_\alpha = \alpha \cdot m_r + (1 - \alpha) \cdot m_T \quad (3.37)$$

erfüllen, wobei $m_T = \underline{x}_M^T \cdot \bar{p} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}_M^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau})$ und $m_r = r \cdot (1 - \hat{s}_a)$ gilt. Zu prüfen ist, ob die Progression der Dividendenbesteuerung Abweichungen gegenüber der linearen Beziehung (3.37) erzeugt, die in einer unterschiedlichen (fiktiv) *isolierten* Besteuerung von Dividenden einerseits und der Dividendenbesteuerung im Kontext des *gesamten* Portfolios \underline{x}_α andererseits begründet sind.⁶³ Hierzu benötigt man Klarheit über die Höhe der Dividendensteuersätze $\hat{\tau}_\alpha$ sowie $\hat{\tau}$, die mit dem gesamten, durch α gekennzeichneten, Portfolio sowie mit der Dividende allein verbunden sind. Betrachtet man zunächst die Funktion des *durchschnittlichen* Einkommensteuersatzes $s_e = 1(ZVE)$ ⁶⁴, der die Besteuerung der Dividenden prägt, und erinnert sich an Gleichung (3.12), aus der man jene Terme eliminiert, die s_e nicht enthalten⁶⁵, so folgt für den durchschnittlichen Einkommensteuersatz \bar{s}_e :

⁶¹ Vgl. grundlegend *Tobin* [Preference, 1958], S. 71-77; *König* [Besteuerung, 1990], S. 83. \underline{x}_M kennzeichnet das Marktportfolio.

⁶² Vgl. hierzu und im Folgenden *König* [Besteuerung, 1990], S. 83.

⁶³ Mithin ist zu untersuchen, ob das gesamte Portfolio eine andere durchschnittliche Einkommensteuerlast generiert als die Summe seiner Komponenten im Falle ihrer fiktiv getrennten Besteuerung. Dies muss nicht nur für das Marktportfolio, sondern für jedes andere Portfolio gelten.

⁶⁴ Vgl. *König* [Besteuerung, 1990], S. 67-68. Die Funktion l sei zweimal differenzierbar, monoton steigend und konkav.

⁶⁵ Zinseinkünfte und Kursgewinne sind aufgrund ihrer pauschalen Besteuerung irrelevant für die Berechnung des Einkommensteuertarifs für Dividenden.

$$\bar{s}_e = \frac{1(ZVE) \cdot ZVE}{ZVE} = \frac{s_e \cdot (0,5 \cdot W \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\delta}) + s_e \cdot EK}{W \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} + EK}. \quad (3.38)$$

Da EK unabhängig von Kapitalmarkttransaktionen ist, kann es aus (3.38) eliminiert werden:

$$\bar{s}_e = \frac{s_e \cdot (0,5 \cdot W \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\delta})}{W \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\delta}} = 0,5 \cdot s_e = \tau. \quad (3.39)$$

Ersetzt man in (3.39) \underline{x} durch beliebige Portfolios, etwa durch \underline{x}_α , so bleibt das Ergebnis erhalten: Durchschnittlich wird $\underline{\delta}$ folglich isoliert gleich besteuert wie im Portfoliozusammenhang. Das Portfolio \underline{x}_α gehorcht also der Forderung (3.37) für alle $\alpha \leq 1$. Die Effizienzlinie nach Steuern entspricht einer Geraden durch die Nachsteuerrenditen der risikolosen Anlage und des Tangentialportfolios, die parallel unterhalb zu jener vor Steuern verläuft.

Betrachtet man progressive Besteuerung, so werden die Dividenden ebenso wie im Falle proportionaler Besteuerung innerhalb und außerhalb des Portfoliokontextes gleich belastet. Allerdings ist der Grenzsteuersatz s_e' dann abhängig vom betrachteten Portfolio:⁶⁶

$$s_e' = \bar{s}_e + 1(ZVE)' \cdot ZVE \quad (3.40)$$

Da die Funktion von s_e' in Abhängigkeit des ZVE nichtlinear ist, verläuft die Effizienzlinie in Form einer konkaven Kurve unterhalb der Geraden vor Steuern.⁶⁷

Zusammenfassend gilt, dass die effizienten Portfolios nach Steuern – ebenso wie in einer Welt ohne Steuern – zumindest bei proportionaler Besteuerung auf einer Geraden angesiedelt sind. Vorauszusetzen ist dabei die Gültigkeit von (3.28).

3.3 Diskussion

3.3.1 Implikationen der Äquivalenzbedingungen

Die in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 entwickelten Bedingungen sind äußerst restriktiv. Sie implizieren insbesondere, dass die Investoren bei einer gegebenen erwarteten Kursrendite \bar{p} eines Portfolios keine Wahl zwischen alternativen Dividendenrenditen haben.⁶⁸ Hätten sie diese, so bestünde zwischen \bar{p} und $\underline{\delta}$ eine *nicht*-lineare Beziehung. Dass die Linearität je-

⁶⁶ EK wurde in Beziehung (3.40) erneut aus der Betrachtung ausgeschlossen.

⁶⁷ Vgl. mit analogem Ergebnis *König* [Besteuerung, 1990], S. 84-85.

⁶⁸ Vgl. *Long* [Taxation, 1977], S. 32.

doch zwingend für die Vorsteuer-Nachsteuereffizienz ist, wird deutlich, wenn man sich die Mengen der effizienten Portfolios vor und nach Steuern graphisch vor Augen führt:

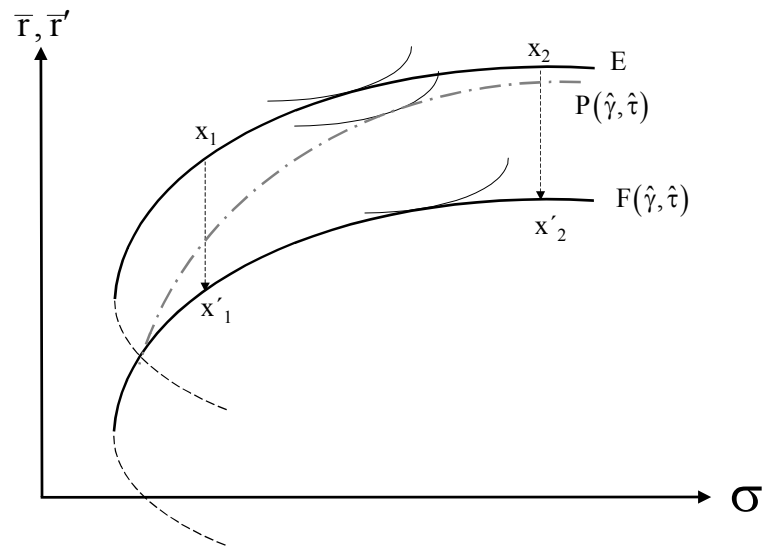


Abbildung 3: Effiziente Portfolios ohne risikolose Anlage vor und nach Steuern⁶⁹

Der effiziente Rand E aus dem Vorsteuer-CAPM wird nach Steuern zu $F(\hat{\gamma}, \hat{\tau})$, die Risiko-Rendite-Kombinationen x_1 und x_2 werden mithin in x'_1 und x'_2 transformiert. Besteht die lineare Beziehung (3.22), wählen Investoren nach Steuern Portfolios aus der Menge $F(\hat{\gamma}, \hat{\tau})$. Es ist dann egal, ob sie nach einem Vor- oder Nachsteuer-Kalkül entscheiden. Herrscht indes eine *nicht*-lineare Beziehung zwischen \bar{p} und $\bar{\delta}$, so könnten die Akteure nach Steuern Effizienzgewinne realisieren, wenn sie etwa Portfolios aus einer Menge $P(\hat{\gamma}, \hat{\tau})$ wählen.⁷⁰ Der Rückgriff auf das Vorsteuer-CAPM führt nach Steuern jedoch – wie gehabt – zur Auswahl von Portfolios aus $F(\hat{\gamma}, \hat{\tau})$ und damit zu suboptimalen Entscheidungen, da $F(\hat{\gamma}, \hat{\tau})$ durch $P(\hat{\gamma}, \hat{\tau})$ dominiert wird.⁷¹ Entsprechendes gilt mit Blick auf Bedingung (3.28). Dieser grundsätzliche Zusammenhang zeigt, weshalb sich die Forderung nach einer linearen Verknüpfung von Dividenden- und Kursrendite durch die verschiedenen, von *Long, König* sowie hier zu-

⁶⁹ Quelle: Eigene Darstellung. Zu einer ähnlichen Abbildung vgl. auch *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 75. Die zum Ursprung konvex verlaufenden Kurven repräsentieren Indifferenzkurven des betrachteten Investors.

⁷⁰ Dies tritt bereits ein, wenn die lineare Beziehung allein durch ein einziges Portfolio oder durch die Steuersätze eines einzelnen Investors durchstoßen wird.

⁷¹ Vgl. im gleichen Sinne *Long* [Taxation, 1977], S. 46. Bezogen auf die Portfolios $P(\hat{\gamma}, \hat{\tau})$ würden die Akteure vor wie nach Steuern effizient entscheiden, gäbe es vor Steuern eine Menge von Risiko-Rendite-Kombinationen, die „parallel“ – im Sinne einer konvexen Hülle – oberhalb von $P(\hat{\gamma}, \hat{\tau})$ verlief.

grundegelegten, Steuersysteme wie ein roter Faden zieht: Unterschiede ergeben sich allenfalls aus abweichenden Steigungsparametern oder Achsenabschnitten, nicht aber in der Linearität.

Hinsichtlich der Kursgewinnsteuer zeigt sich, dass ihre Integration in den Kalkül keine bedeutenden Abweichungen gegenüber Fällen erzeugt, in denen man darauf verzichtet. Wie gesehen, gelangt man vom umfassenderen zum speziellen Fall, indem der Steuersatz $\hat{\gamma}$ gestrichen wird. Hintergrund dessen ist die einfache – weil pauschale – Konstruktion dieser Steuer.

3.3.2 Empirische Resultate

Mit der Enge der Äquivalenz-Bedingungen könnte man leben, wenn sie zumindest approximativ eine gute Beschreibung der Realität abgäben. Empirische Studien zeigen indes, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist. Derartige Studien müssen die Linearität des Zusammenhangs zwischen Kurs- und Dividendenrendite testen.⁷² Während *Friend / Puckett* und *Black / Scholes* für den amerikanischen Kapitalmarkt keine derartige Beziehung feststellen können⁷³, findet *Blume* eine solche, die jedoch allein im kleinen Zeitfenster zwischen 1947 und 1956 signifikant ist.⁷⁴ *Litzenberger / Ramaswamy* ermitteln einen hochgradig signifikanten linearen Zusammenhang auf Basis kurzfristiger (monatlicher) Dividendenrenditen.⁷⁵ *Miller / Scholes* halten dem entgegen, dass derartige Tests sensibel auf die zugrundeliegende Definition der Dividendenrendite reagieren.⁷⁶ Eliminiere man verzerrende Ankündigungseffekte hinsichtlich der Dividendenpolitik, die bei Verwendung kurzfristiger Dividendenrenditen auftreten, so gelange man zu keiner signifikanten Beziehung zwischen Dividenden- und Kursrendite.⁷⁷ Kritisch zur Rolle derartiger Informationseffekte äußert sich *Hess*, der feststellt, dass sie keinen signifikanten Einfluss auf die Beziehung zwischen Dividenden- und Kursrendite zeitigten.⁷⁸ Auch er findet keinen signifikanten Zusammenhang gemäß (3.22) oder (3.28). Diesen auf Grundlage langfristiger Dividendenrenditen empirisch zu stützen, gelingt indes *Rosenberg / Marathe* sowie *Ang / Peterson*, die im Gegensatz zu den vorgenannten

⁷² Die Untersuchungen in ihrer Gesamtheit darzustellen, wäre ein fruchtloser Versuch. Im folgenden wird daher nur eine Auswahl an Arbeiten gegeben, welche die Diskussion wesentlich geprägt haben.

⁷³ Vgl. *Friend / Puckett* [Dividends, 1964]; *Black / Scholes* [Effects, 1974], S. 13-19, sowie zur Interpretation ihrer Ergebnisse *Long* [Taxation, 1977], S. 35-36.

⁷⁴ Vgl. *Blume* [Evidence, 1980], S. 571-572. Er erhebt die Dividendenrenditen vierteljährlich.

⁷⁵ Vgl. *Litzenberger / Ramaswamy* [Effect, 1979], S. 183-184, für den Zeitraum zwischen 1936 und 1977; *Litzenberger / Ramaswamy* [Dividends, 1980], S. 479-481, für die Jahre 1936 bis 1978; *Litzenberger / Ramaswamy* [Tax, 1982], S. 435-442, in der Zeit zwischen 1940 und 1980. Die Autoren testen indes das Nachsteuer-CAPM, so dass die Regressionsgleichung im Gegensatz zu (3.22) und (3.28) zusätzlich den β -Wert als unabhängige Variable enthält.

⁷⁶ Vgl. *Miller / Scholes* [Taxes, 1982], S. 1123-1131; *Miller* [Case, 1986], S. 460.

⁷⁷ Vgl. *Miller / Scholes* [Taxes, 1982], S. 1131. Die verwandte Regressionsgleichung enthält jedoch zusätzlich den β -Wert, so dass im Gegensatz zur Studie von *Blume* kein direkter Test der Beziehung zwischen $\underline{\delta}$ und \bar{p} gemäß (3.22) gegeben wird.

⁷⁸ Vgl. *Hess* [Behavior, 1982], S. 450-451.

Autoren auf *ex ante*-Schätzungen zurückgreifen.⁷⁹ Zu uneinheitlichen Ergebnissen gelangt *Morgan*, der die Existenz eines linearen Zusammenhangs negiert.⁸⁰ Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass von der Erfüllung der erarbeiteten Irrelevanzbedingungen im Allgemeinen nicht auszugehen ist, so dass persönliche Steuern grundsätzlich Abweichungen von der Gleichgewichtslösung des Standard-CAPM erzeugen. Selbst wenn grundsätzlich eine lineare Beziehung gefunden wird, ist damit noch nicht Gewähr leistet, dass diese exakt den Anforderungen (3.22) bis (3.24) und (3.26) bis (3.27) oder (3.28) bis (3.30) sowie (3.32) genügt.

3.3.3 Konsequenzen für die Unternehmensbewertung

Überträgt man die erarbeiteten Ergebnisse auf den hier im Vordergrund stehenden Kontext der Unternehmensbewertung, so zeigt sich, dass oftmals Renditeforderungen aus dem Vorsteuer-CAPM mit persönlichen (Misch-)Steuersätzen kombiniert werden⁸¹ oder auf die Einbeziehung persönlicher Steuern gänzlich verzichtet wird.⁸² Jene Renditeforderungen sind Ausfluss einer $\mu - \sigma$ -effizienten Portfolio-Auswahl *vor Steuern*. Um sicherzustellen, dass diese Eigenkapitalrenditen auch in einer Welt mit Steuern effizient sind, bedürfte es der linearen Bedingungen (3.22) oder (3.28). Sind diese jedoch erfüllt, könnte (und müsste) von einer Integration der Besteuerung in den Kalkül abgesehen werden. Sieht man dagegen die Integration von persönlichen Steuern in den Kalkül als zwingend an, da man die Enge der Irrelevanzbedingungen scheut, so bleibt als Alternative nur die *konsistente* Berücksichtigung der Besteuerung im Wege einer direkten Ableitung eines CAPM unter Steuern.⁸³ Ein Blick in grundlegende Arbeiten⁸⁴ zu diesem Aspekt zeigt, dass sich die dort abgeleiteten Renditeforderungen aus dem Nachsteuer-CAPM von den Formulierungen der Unternehmensbewertungsliteratur regelmäßig unterscheiden.

⁷⁹ Vgl. *Rosenberg / Marathe* [Tests, 1979], S. 202-204, für den Zeitraum von 1931-1966; *Ang / Peterson* [Yield, 1985], S. 541-546. Sie verwenden ein Signifikanz-Niveau von 10 %. Die von beiden Autorengruppen verwandten Regressionsgleichungen weichen von (3.22) und (3.28) ab.

⁸⁰ Vgl. *Morgan* [Dividends, 1982], S. 1083-1085.

⁸¹ Welche einzelnen Steuersätze den Mischsteuersatz bestimmen, wird oft nicht detailliert offengelegt. Vgl. etwa *Kohl / Schulte* [IDW S. 1], S. 1157, die von einem nach IDW S 1 „typisierten“ Steuersatz in Höhe von 35 % oder 17,5 % ausgehen. Zum typisierten Satz vgl. *Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V.* [Wirtschaftsprüferhandbuch, 2002], S. 98, Tz. 282, und zur Berücksichtigung individueller steuerlicher Verhältnisse der Unternehmenseigner nebulös S. 49, Tz. 147, sowie *Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V.* [IDW S. 1, 2000], S. 838; vgl. ferner *Baetge / Niemeyer / Kümmel* [DCF-Verfahren, 2001], S. 478; *Schultze* [Methoden, 2001], S. 173-175; *König / Zeidler* [Behandlung, 1996], S. 1101.

⁸² Vgl. etwa *Copeland / Koller / Murrin* [Valuation, 2000].

⁸³ Vgl. a. *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 351.

⁸⁴ Vgl. insbesondere *Brennan* [Valuation, 1970]; *Litzenberger / Ramaswamy* [Effect, 1979]; *Litzenberger / Ramaswamy* [Dividends, 1980]; für den deutschen Raum vgl. *Drukarczyk / Richter* [Finanzentscheidungen, 1995], S. 562, die allerdings noch vom Anrechnungsverfahren ausgehen.

4. Thesenförmige Zusammenfassung

- (1) Das CAPM ist ohne die Annahme der Besteuerung abgeleitet worden. Interessant ist daher die Frage, unter welchen Bedingungen es in einer Welt mit Steuern gültig bleibt, da die Antwort hierauf zeigt, warum Steuern relevant sind.
- (2) Gezeigt wurde, dass auch bei gegenwärtigen deutschen steuerlichen Verhältnissen eine lineare Beziehung zwischen der Dividenden- und der Kursrendite jedes einzelnen Portfolios herrschen muss, damit persönliche Steuern im CAPM irrelevant sind. Die Achsenabschnitte und Steigungsparameter dieser linearen Funktionen müssen darüber hinaus restriktiven Nebenbedingungen gehorchen. Ein Vergleich mit den Arbeiten von *Long* und *König* offenbart, dass diese Linearität im Modellkontext des CAPM stets vorauszusetzen ist, während sich mit Blick auf die Steigung und den Achsenabschnitt Unterschiede in den Anforderungen ergeben, die dem hier zugrundegelegten Steuersystem geschuldet sind. Bei proportionaler Besteuerung sind diese Anforderungen unabhängig vom betrachteten Portfolio. Demgegenüber ist der Fall progressiver Besteuerung komplexer, da die Parameter funktional abhängig vom betrachteten Portfolio sind.
- (3) Bei Existenz der risikolosen Anlage liegen die effizienten Portfolios nach Steuern bei proportionaler Besteuerung auf einer Geraden, die durch die Nettorenditen der risikofreien Anlage und des Tangentialportfolios zu legen ist. Im Falle progressiver Belastungen weist die Effizienzlinie indes die Form einer konkaven Kurve auf. Grund hierfür ist, dass der Grenzsteuersatz abhängig vom jeweils betrachteten Portfolio ist und die Funktion des Grenzsteuersatzes in Abhängigkeit des zu versteuernden Einkommens nichtlinear verläuft.
- (4) Sowohl theoretisch als auch empirisch zeigt sich, dass diese Bedingungen rigoros sind. Von der Irrelevanz der Besteuerung im Kontext des CAPM generell auszugehen, ist somit nicht gerechtfertigt. Hinsichtlich der empirischen Untersuchungen der Irrelevanzbedingungen erkennt man, dass die Ergebnisse abhängig von der Definition der Dividendenrendite sind. Die Frage, ob eine lang- oder kurzfristige Dividendenrendite angebracht ist, scheint bis heute offen zu sein.
- (5) Mit Blick auf die Unternehmensbewertung erkennt man, dass im Kontext von Risikozuschlägen, die dem CAPM entstammen, zwei Wege zur konsistenten Berücksichtigung von persönlichen Steuern denkbar sind. Zum einen kann man sie trotz ihrer Existenz vernachlässigen, indem man von einer linearen Beziehung zwischen der Dividenden- und der Kursrendite ausgeht. Ist diese nicht erfüllt, so bleibt allein der Weg einer direkten Integration der Besteuerung in das Kapitalmarktmodell.

Anhang 1 zu Abschnitt 3.2.1

Für den in der Varianz in Gleichung (3.16) enthaltenen Term $(r' - \bar{r}')^2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (r' - \bar{r}')^2 = & \\ & \left\{ \underline{x}^T \cdot \underline{\rho} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) + x_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) - \right. \\ & \left. \left[\underline{x}^T \cdot \underline{\bar{\rho}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{\delta}} \cdot (1 - \hat{\tau}) + x_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

und da $\underline{\delta}$ sowie r deterministisch sind:

$$\begin{aligned} \left[\underline{x}^T \cdot \underline{\rho} \cdot (1 - \hat{\gamma}) - \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{\rho}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) \right]^2 = & \\ \left[\underline{x}^T \cdot (1 - \hat{\gamma}) \cdot (\underline{\rho} - \underline{\bar{\rho}}) \right]^2 & \end{aligned} \quad (5.2)$$

Für die Varianz folgt damit (3.16):

$$\sigma_{r'}^2 = \underline{x}^T \underline{\Sigma} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2. \quad (5.3)$$

Beweis von Bedingung (3.20):⁸⁵

Wenn \underline{x} ein effizientes Portfolio vor Steuern ist und keine risikolose Anlage existiert, muss es die (3.7) und (3.8) gehorchen. Übertragen auf den Nachsteuerfall folgt aus (3.16)⁸⁶

$$\text{Min}_{\underline{x}} \underline{x}^T \underline{\Sigma} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 \quad (5.4)$$

und unter Berücksichtigung von (3.8) in Verbindung mit (3.15)

$$\begin{aligned} \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{\rho}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{\delta}} \cdot (1 - \hat{\tau}) &= m' (> m'_0), \\ \underline{x}^T \cdot \mathbf{I} &= 1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei $m'(m'_0)$ eine gegebene Nachsteuerrendite eines Portfolios (des mit den Rückflüssen des Marktportfolios unkorrelierten Portfolios) ist. Zugleich muss \underline{x} vor Steuern Gewähr leisten, dass es positive Konstanten z_1 und z_2 gibt, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma} \underline{x} - z_1 \cdot (\underline{\bar{\rho}} + \underline{\bar{\delta}}) - z_2 \cdot \mathbf{I} &= 0, \\ \underline{x}^T \cdot (\underline{\bar{\rho}} + \underline{\bar{\delta}}) &= m \end{aligned} \quad (5.6)$$

⁸⁵ Die folgenden Ausführungen sind angelehnt an *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 178-179, der allerdings nur den Fall vor Steuern beweist.

⁸⁶ Vgl. zu einem ähnlichen Vorgehen *Chen* [Rules, 1986], S. 7-8.

folgen.⁸⁷ Anwendung des *Lagrangeansatzes*⁸⁸ auf (5.4) und (5.5) liefert:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\underline{x}} \underline{x}^T \underline{\mathcal{Z}} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - 2 \cdot z_1 \cdot \left[\underline{x}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) - \underline{m}' \right] - 2 \cdot z_2 \cdot (\underline{x}^T \mathbf{I} - 1), \\ \underline{m}' > \underline{m}'_0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Minimierung der *Lagrangefunktion* nach \underline{x}^T führt zu

$$\underline{\mathcal{Z}} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot \left[\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) \right] - z_2 \cdot \mathbf{I} = 0. \quad (5.8)$$

Zu zeigen ist noch, dass wenn \underline{x} effizient ist, auch das Portfolio \underline{x}_m mit der vorgegebenen erwarteten Rendite m unter der Bedingung (5.8) effizient ist.⁸⁹ Hierzu müssen neben den Erwartungswerten die Varianzen von \underline{x} und \underline{x}_m übereinstimmen.⁹⁰ Ist \underline{x}_m effizient, so muss es in Analogie zu (5.8) die Anforderungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{Z}} \underline{x}_m \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_{m1} \cdot \left[\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) \right] - z_{m2} \cdot \mathbf{I} = 0, \\ \underline{x}_m^T \cdot \underline{r}' = \underline{m}' \end{aligned} \quad (5.9)$$

erfüllen. Durch Multiplikation von (5.9) mit \underline{x}^T und \underline{x}_m^T findet man

$$\underline{x}^T \underline{\mathcal{Z}} \underline{x}_m \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 = z_{m1} \cdot \underline{m}' + z_{m2} \quad (5.10)$$

und

$$\underline{x}_m^T \underline{\mathcal{Z}} \underline{x}_m \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 = z_{m1} \cdot \underline{m}' + z_{m2}, \quad (5.11)$$

woraus

$$\underline{x}^T \underline{\mathcal{Z}} \underline{x}_m \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 = \underline{x}_m^T \underline{\mathcal{Z}} \underline{x}_m \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 \quad (5.12)$$

folgt. Multipliziert man (5.8) mit \underline{x}^T und \underline{x}_m^T , so resultiert

$$\underline{x}_m^T \underline{\mathcal{Z}} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 = \underline{x}^T \underline{\mathcal{Z}} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2. \quad (5.13)$$

⁸⁷ Vgl. *Black* [Equilibrium, 1972], S. 448; *Merton* [Derivation, 1972], S. 1852; *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 66; ähnlich *Long* [Taxation, 1977], S. 45.

⁸⁸ Vgl. *Merton* [Derivation, 1972], S. 1852; *Black* [Equilibrium, 1972], S. 447-448.

⁸⁹ Vgl. dazu und im Folgenden für den Fall vor Steuern *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 178-179.

⁹⁰ Anders formuliert ist zu zeigen, dass wenn Anforderung (5.8) zu effizienten Portfolios \underline{x} führt, dies auch für \underline{x}_m zu gelten hat.

Da die linken Seiten der Gleichungen (5.12) und (5.13) gleichgesetzt werden können $\left(\underline{x}^T \underline{Z} \underline{x}_m \cdot (1-\hat{\gamma})^2 = \underline{x}_m^T \underline{Z} \underline{x} \cdot (1-\hat{\gamma})^2\right)$, muss dies auch für die rechten Seiten gelten:

$$\underline{x}_m^T \underline{Z} \underline{x}_m \cdot (1-\hat{\gamma})^2 = \underline{x}^T \underline{Z} \underline{x} \cdot (1-\hat{\gamma})^2. \quad (5.14)$$

Formuliert in (5.14) ist die zu zeigende Identität der Varianzen der Portfolios \underline{x} und \underline{x}_m .

Beweis von Bedingung (3.21):⁹¹

Wenn $(\underline{x}, x_r) \in \text{PORT}_{N+1}$ ein effizientes Portfolio vor Steuern ist und eine risikolose Anlagemöglichkeit existiert, dann muss es die Bedingungen (3.7) und (3.9) erfüllen. Übertragen auf den Nachsteuerfall folgt aus (3.16)

$$\text{Min}_{\underline{x}} \underline{x}^T \underline{Z} \underline{x} \cdot (1-\hat{\gamma})^2 \quad (5.15)$$

und unter Berücksichtigung von (3.9) in Verbindung mit (3.15)

$$\begin{aligned} \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1-\hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1-\hat{\tau}) + x_r \cdot r \cdot (1-\hat{s}_a) &= m' (> m_r), \\ \underline{x}^T \mathbf{I} + x_r &= 1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Zugleich muss $(\underline{x}, x_r) \in \text{PORT}_{N+1}$ vor Steuern Gewähr leisten, dass es positive Konstanten z_1 und z_2 gibt, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} \underline{Z} \underline{x} - z_1 \cdot (\underline{\bar{p}} + \underline{\delta}) - z_2 \cdot \mathbf{I} &= 0, \\ z_1 \cdot r + z_2 &= 0, \\ \underline{x}^T \cdot (\underline{\bar{p}} + \underline{\delta}) + x_r \cdot r &= m \end{aligned} \quad (5.17)$$

genügen.⁹² Der *Lagrangemultiplikator* für (5.15) und (5.16) erzeugt

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\underline{x}} \underline{x}^T \underline{Z} \underline{x} \cdot (1-\hat{\gamma})^2 - 2z_1 \left[\underline{x}^T \underline{\bar{p}} (1-\hat{\gamma}) + \underline{x}^T \underline{\delta} (1-\hat{\tau}) + x_r r (1-\hat{s}_a) - m' \right] - 2z_2 (\underline{x}^T \mathbf{I} + x_r - 1), \\ m' > m_r \end{aligned} \quad (5.18)$$

und liefert für die Bedingungen erster Ordnung nach \underline{x}^T

$$\underline{Z} \underline{x} \cdot (1-\hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot [\underline{\bar{p}} \cdot (1-\hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1-\hat{\tau})] - z_2 \cdot \mathbf{I} = 0, \quad (5.19)$$

⁹¹ Der Beweis verläuft analog zu demjenigen von (3.20). Vgl. König [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 66, der den Nachweis nicht ausführt.

⁹² Vgl. Black [Equilibrium, 1972], S. 453; König [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 66.

also (5.8), und nach x_r

$$-z_1 \cdot r(1 - \hat{s}_a) - z_2 = 0. \quad (5.20)$$

Analog zum Nachweis von (3.20) ist zu zeigen, dass ein gegebenes Portfolio $(\underline{x}_m, x_{mr}) \in \text{PORT}_{N+1}$ mit der erwarteten Rendite m effizient ist. Hierzu muss es (5.19)

$$\begin{aligned} \cancel{\underline{Z}} \cancel{\underline{x}}_m \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_{m1} \cdot [\bar{\rho} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau})] - z_{m2} \cdot \mathbf{I} &= 0 \\ \underline{x}_m^T \bar{r}' &= m' (> m_r) \end{aligned} \quad (5.21)$$

und (5.20)

$$z_{m1} \cdot r(1 - \hat{s}_a) + z_{m2} = 0 \quad (5.22)$$

erfüllen.⁹³ Multiplikation von (5.21) mit \underline{x}^T und \underline{x}_m^T führt auf

$$\underline{x}^T \cancel{\underline{Z}} \cancel{\underline{x}}_m \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 = z_{m1} \cdot (m' - x_r) + z_{m2} \cdot (1 - x_r) \quad (5.23)$$

und

$$\underline{x}_m^T \cancel{\underline{Z}} \cancel{\underline{x}}_m \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 = z_{m1} \cdot (m' - x_r) + z_{m2} \cdot (1 - x_r). \quad (5.24)$$

Wendet man dieselbe Operation auf (5.19) an, so resultiert

$$\underline{x}_m^T \cancel{\underline{Z}} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 = \underline{x}^T \cancel{\underline{Z}} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2. \quad (5.25)$$

Analog zu (5.14) erhält man die Identität der Portfoliovarianzen von \underline{x} und \underline{x}_m .

⁹³ Wie mit (3.5) vorausgesetzt, enthält \bar{r}' für die Nachsteuerrendite auf die risikolose Anlage.

Anhang 2 zu Abschnitt 3.2.2

Beweis der Bedingungen (3.22) und (3.23):⁹⁴

Zu zeigen ist zunächst, dass wenn die rechte Seite von (3.22) erfüllt ist, $\underline{x} \in E$ und $\underline{x} \in F(\gamma, \tau)$ gilt. Wenn ein Portfolio $\underline{x} \in E$ ist und $\underline{\delta} = a \cdot \underline{\bar{p}} + b \cdot I$ gilt, dann muss es der Anforderung (5.6) genügen. Nach Steuern folgt mit (5.19):

$$\begin{aligned}
 & \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot [\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau})] - w_2 \cdot I = \\
 & \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot [\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + (a \cdot \underline{\bar{p}} + b \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau})] - w_2 \cdot I = \\
 & \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot [\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) + b \cdot I \cdot (1 - \hat{\tau})] - w_2 \cdot I = \\
 & \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) \cdot \underline{\bar{p}} - (w_2 + w_1 \cdot b \cdot (1 - \hat{\tau})) \cdot I = 0
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Für die *Lagrangemultiplikatoren* w_1 und w_2 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{z_1}{1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})} \\
 w_2 &= z_2 - \frac{z_1 \cdot b \cdot (1 - \hat{\tau})}{1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Damit ist $\underline{x} \in F(\gamma, \tau)$, wenn durch geeignete a und b analog zur Nebenbedingung in (5.6) die Restriktion⁹⁵

$$\underline{x}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) > m'_0 \tag{5.28}$$

eingehalten wird. Inhaltlich fordert (5.28), dass die erwartete Nettorendite auf \underline{x} , (3.15), größer sein muss als die Nettorendite auf das Minimum-Varianz-Portfolio m'_0 . Nachzuweisen ist weiterhin, dass wenn (5.26) und (5.27) erfüllt sind, also $\underline{x} \in F(\gamma, \tau)$ ist, auch $\underline{x} \in E$ gilt. Wenn $\underline{x} \in F(\gamma, \tau)$ und $\underline{\delta} = a \cdot \underline{\bar{p}} + b \cdot I$ vorausgesetzt wird, dann hat entsprechend (5.26) zu gelten:

$$\cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) \cdot \underline{\bar{p}} - (w_2 + w_1 \cdot b \cdot (1 - \hat{\tau})) \cdot I = 0. \tag{5.29}$$

Setzt man (5.27) in (5.29) ein, so resultiert nach einigen Umformungen (5.6):

⁹⁴ Vgl. hierzu *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 74-75.

⁹⁵ Aufgrund des hier zugrundegelegten Steuersystems weicht diese von der Bedingung bei *König* [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 74, deutlich ab.

$$\begin{aligned} & \underline{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - \frac{z_1}{1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})} \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) \cdot \underline{\bar{p}} - \\ & \left(z_2 - \frac{z_1 \cdot b \cdot (1 - \hat{\tau})}{1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})} + \frac{z_1}{1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})} \cdot b \cdot (1 - \hat{\tau}) \right) \cdot \mathbf{I} = \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\underline{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot \underline{\bar{p}} - \left(\frac{z_2 \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) - z_1 \cdot b \cdot (1 - \hat{\tau}) + z_1 \cdot b \cdot (1 - \hat{\tau})}{1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})} \right) \cdot \mathbf{I} =$$

$$\underline{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot \underline{\bar{p}} - z_2 \cdot \mathbf{I} = 0$$

Gleichung (5.6) unterscheidet sich von (5.30) durch den Term $(1 - \hat{\gamma})^2$. Dieser ist jedoch insofern irrelevant, als die Rangfolge der Portfolios nach der Nachsteuer-Varianz $\underline{x}^\top \underline{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2$ bei jedem beliebigen Steuersatz $\hat{\gamma}$ dieselbe ist.⁹⁶ Hiermit ist gezeigt, dass wenn (5.27) erhalten bleibt, $\underline{x} \in E$ erfüllt ist, wobei a sowie b der Bedingung $\underline{x}^\top \cdot \underline{\bar{p}} + \underline{x}^\top \cdot \underline{\delta} > m_0$ zu genügen haben. Bewiesen werden muss umgekehrt, dass wenn $\underline{x} \in E$ und $\underline{x} \in F(\gamma, \tau)$ gilt, auch $\underline{\delta} = a \cdot \underline{\bar{p}} + b \cdot \mathbf{I}$ gültig bleibt. Dann müssen sich (5.30) und (5.26) gleichsetzen lassen

$$\underline{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot \underline{\bar{p}} - z_2 \cdot \mathbf{I} = \underline{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot [\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau})] - w_2 \cdot \mathbf{I}, \quad (5.31)$$

woraus

$$w_1 \cdot [\underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau})] + w_2 \cdot \mathbf{I} = z_1 \cdot \underline{\bar{p}} + z_2 \cdot \mathbf{I}$$

$$w_1 \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) = \underline{\bar{p}} \cdot [z_1 - w_1 \cdot (1 - \hat{\gamma})] + \mathbf{I} \cdot (z_2 - w_2)$$

$$\underline{\delta} = \underline{\bar{p}} \cdot \left[\frac{z_1 - w_1 \cdot (1 - \hat{\gamma})}{w_1 \cdot (1 - \hat{\tau})} \right] + \mathbf{I} \cdot \left(\frac{z_2 - w_2}{w_1 \cdot (1 - \hat{\tau})} \right) \quad (5.32)$$

$$\underline{\delta} = a \cdot \underline{\bar{p}} + b \cdot \mathbf{I}$$

$$\text{mit } a = \frac{z_1 - w_1 \cdot (1 - \hat{\gamma})}{w_1 \cdot (1 - \hat{\tau})}, b = \frac{z_2 - w_2}{w_1 \cdot (1 - \hat{\tau})}$$

folgt. Die Bestimmungsgleichung in (5.32) für die Konstanten a und b lässt sich in (5.27) überleiten, womit (3.22) und (3.23) nachgewiesen sind.

⁹⁶ Vgl. Long [Taxation, 1977], S. 31 und S. 46. Mit anderen Worten könnte man den Term in (5.6) ebenso gut einfügen wie man ihn in (5.30) vernachlässigen kann.

Beweis von Bedingung (3.24):⁹⁷

Ausgegangen wird von einem Portfolio $\underline{x} \in E$ und einem beliebigen (nicht effizienten) Portfolio \underline{y} , so dass vor Steuern

$$\begin{aligned} \underline{x}^T \underline{Z} \underline{x} &= \underline{y}^T \underline{Z} \underline{y}, \\ \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{p}} + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} &> \underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} \end{aligned} \quad (5.33)$$

gilt, woraus nach Steuern

$$\underline{x}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) > \underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}). \quad (5.34)$$

wird. Unter Rückgriff auf die Beziehung $\underline{\delta} = a \cdot \underline{\bar{p}} + b \cdot I$ ergibt sich aus (5.34) unter der Annahme, dass die Einkommensteuer keiner Progression unterliegt, mithin $\hat{\tau}$ gekürzt werden kann, und für $k_x = \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{p}}$ und $k_y = \underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}}$, dass

$$\begin{aligned} k_x \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) &> k_y \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) \\ k_x \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot (a \cdot \underline{\bar{p}} + b \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}) &> k_y \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot (a \cdot \underline{\bar{p}} + b \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

ist. Da gemäß (3.8) $\underline{x}^T \cdot I = 1$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} k_x \cdot (1 - \hat{\gamma}) + (k_x \cdot a + b) \cdot (1 - \hat{\tau}) &> k_y \cdot (1 - \hat{\gamma}) + (k_y \cdot a + b) \cdot (1 - \hat{\tau}) \\ k_x \cdot (1 - \hat{\gamma}) + k_x \cdot a \cdot (1 - \hat{\tau}) + b \cdot (1 - \hat{\tau}) &> k_y \cdot (1 - \hat{\gamma}) + k_y \cdot a \cdot (1 - \hat{\tau}) + b \cdot (1 - \hat{\tau}) \\ k_x \cdot [(1 - \hat{\gamma}) + a \cdot (1 - \hat{\tau})] &> k_y \cdot [(1 - \hat{\gamma}) + a \cdot (1 - \hat{\tau})] \\ (k_x - k_y) \cdot [(1 - \hat{\gamma}) + a \cdot (1 - \hat{\tau})] &> 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Wenn vorausgesetzt werden darf, dass $k_x - k_y > 0$ ist, folgt für a:

$$1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}) > 0 \Leftrightarrow a > \frac{\hat{\gamma} - 1}{(1 - \hat{\tau})}. \quad (5.37)$$

Mit (5.37) ist die untere Schranke für a angegeben. Dass $k_x - k_y > 0$ vorausgesetzt werden kann, lässt sich aus der Forderung $\underline{x}^T \cdot \underline{\bar{p}} + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} > \underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta}$ aus (5.33) zeigen. Aus ihr resultiert:

⁹⁷ Vgl. zum analogen Vorgehen König [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 77-79.

$$\begin{aligned}
k_x + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} &> k_y + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} \Leftrightarrow \\
k_x \cdot I + \underline{x}^T \cdot I \cdot \underline{\delta} &> k_y \cdot I + \underline{y}^T \cdot I \cdot \underline{\delta} \Leftrightarrow \\
k_x \cdot I + 1 \cdot \underline{\delta} &> k_y \cdot I + 1 \cdot \underline{\delta} \Leftrightarrow \\
k_x \cdot I &> k_y \cdot I \Leftrightarrow I \cdot (k_x - k_y) > 0
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Beweis von Bedingung (3.25):

Die Nachsteuerrendite \bar{r}' eines beliebigen Portfolios \underline{y}

$$\underline{y}^T \cdot \bar{p}(1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta}(1 - \hat{\tau}) \tag{5.39}$$

wird für den Fall $a = \frac{\hat{\gamma} - 1}{(1 - \hat{\tau})}$ zu

$$\begin{aligned}
\bar{r}' &= \underline{y}^T \cdot \bar{p} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot (a \cdot \bar{p} + b \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}) = \\
&\underline{y}^T \cdot \bar{p} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot \left(\frac{\hat{\gamma} - 1}{(1 - \hat{\tau})} \cdot \bar{p} + b \cdot I \right) \cdot (1 - \hat{\tau}) = \\
&\underline{y}^T \cdot b \cdot I \cdot (1 - \hat{\tau}) \stackrel{\underline{y}^T \cdot I = 1}{=} \\
&b \cdot (1 - \hat{\tau})
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Beweis der Behauptung „Kehrt man in (3.24) das Ungleichheitszeichen um, so bleibt die Vorsteuer-Nachsteuereffizienz erhalten.“ **auf S. 10:**⁹⁸

Dreht man in (5.37) das Ungleichheitszeichen um und geht die Schritte von (5.36) rückwärts durch, so kehrt sich auch für die Nachsteuerrenditen der Portfolios \underline{x} und \underline{y} in (5.35) das Ungleichheitszeichen um. Folglich ist \underline{y} effizient nach Steuern, während es \underline{x} nicht mehr ist. Aus (5.35) wird also:

$$k_x \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot (a \cdot \bar{p} + b \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}) < k_y \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot (a \cdot \bar{p} + b \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}). \tag{5.41}$$

Da Portfolios vorsteuer-effizient sind, wenn sie nach Steuern effizient bei Steuersätzen in Höhe von 0 sind, liefert (5.41) für die Beziehung der Vorsteuer-Renditen

⁹⁸ Ähnlich argumentiert König [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 78, allerdings für die Untergrenze des Parameters a und ohne Beweis.

$$k_x + \underline{x}^T \cdot (a \cdot \bar{p} + b \cdot I) < k_y + \underline{y}^T \cdot (a \cdot \bar{p} + b \cdot I), \quad (5.42)$$

so dass \underline{y} die Effizienzeigenschaft nach Steuern auch vor Steuern nicht verliert.

Ableitung von Bedingung (3.27):

Für die der Progression unterliegenden Steuersätze $\hat{\tau}_x$ und $\hat{\tau}_y$ ergibt sich aus (5.36)

$$\begin{aligned} k_x \cdot (1 - \hat{\gamma}) + (k_x \cdot a + b) \cdot (1 - \hat{\tau}_x) &> k_y \cdot (1 - \hat{\gamma}) + (k_y \cdot a + b) \cdot (1 - \hat{\tau}_y) \\ (k_x - k_y) \cdot (1 - \hat{\gamma}) &> (k_y \cdot a + b) \cdot (1 - \hat{\tau}_y) - (k_x \cdot a + b) \cdot (1 - \hat{\tau}_x) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Anhang 3 zu Abschnitt 3.2.3

Beweis der Bedingungen (3.28) und (3.29):

Zu zeigen ist zunächst, dass wenn die rechte Seite von (3.28) erfüllt ist, $(\underline{x}, x_r) \in E$ und $(\underline{x}, x_r) \in F(\hat{\gamma}, \hat{\tau}, \hat{s}_a)$ gilt. Wenn ein Portfolio $\underline{x} \in E$ ist und für die Dividenden-

rendite $\underline{\delta} = a \cdot (\bar{p} - r \cdot I) + \frac{\hat{\gamma} - \hat{s}_a}{(1 - \hat{\tau})} \cdot r \cdot I$ gilt, dann muss es der Anforderung (5.17) genügen. Nach

Steuern folgt mit (5.19):

$$\begin{aligned} \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot [\bar{p} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau})] - w_2 \cdot I &= \\ \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot \left[\bar{p} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \left(a \cdot (\bar{p} - r \cdot I) + \frac{\hat{\gamma} - \hat{s}_a}{(1 - \hat{\tau})} \cdot r \cdot I \right) \cdot (1 - \hat{\tau}) \right] - w_2 \cdot I &= \quad (5.44) \\ \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) \cdot \bar{p} - (w_1 \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r + w_2 - w_1 \cdot a \cdot r \cdot (1 - \hat{\tau})) \cdot I &= 0 \end{aligned}$$

Die Parameter z_1 und z_2 aus (5.19) sind also:

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1 \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) \\ z_2 &= w_1 \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r + w_2 - w_1 \cdot a \cdot r \cdot (1 - \hat{\tau}) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Sie müssen Gewähr leisten, dass aus der Bedingung $z_1 \cdot r + z_2 = 0$ aus (5.17) die analoge Forderung *nach Steuern* (5.20) wird. Einsetzen von (5.45) in (5.20) liefert:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot r + z_2 &= \\ w_1 \cdot r \cdot ((1 - \hat{\gamma}) + a \cdot (1 - \hat{\tau})) + w_1 \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r + w_2 - w_1 \cdot a \cdot r \cdot (1 - \hat{\tau}) &= \quad (5.46) \\ w_1 \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) + w_2 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\underline{x} \in F(\hat{\gamma}, \hat{\tau}, \hat{s}_a)$ ist. Umgekehrt ist zu prüfen, ob das Portfolio $\underline{x} \in F(\hat{\gamma}, \hat{\tau}, \hat{s}_a)$ bei Erfüllung von (5.44), (5.45) und (5.46) auch effizient *vor Steuern* ist. Durch Einsetzen von (5.45) in (5.44) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - \frac{z_1}{(1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}))} \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) \cdot \bar{\rho} - \\
& \left(\frac{z_1}{(1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}))} \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r + z_2 - w_1 \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r + w_1 \cdot a \cdot r \cdot (1 - \hat{\tau}) \right) \\
& - \frac{z_1}{(1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}))} \cdot a \cdot r \cdot (1 - \hat{\tau}) \Big) \cdot I = \\
& \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot \bar{\rho} - I \cdot \\
& \left(\frac{z_1 \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r + \left[z_2 - \frac{z_1 \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r + z_1 \cdot a \cdot r \cdot (1 - \hat{\tau})}{(1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}))} \right] \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) - z_1 \cdot a \cdot r \cdot (1 - \hat{\tau})}{(1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}))} \right) = \\
& \cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot \bar{\rho} - z_2 \cdot I = 0 \tag{5.47}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck entspricht (5.17), wobei der Term $(1 - \hat{\gamma})^2$ erneut zu vernachlässigen ist.⁹⁹

Analog resultiert aus (5.46) durch Einsetzen von (5.45) ebenfalls (5.17):

$$\begin{aligned}
& \frac{z_1 \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) - z_1 \cdot r \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) + z_1 \cdot a \cdot r \cdot (1 - \hat{\tau})}{(1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}))} + z_2 = \\
& \frac{z_1 \cdot r \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}))}{(1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}))} + z_2 = \tag{5.48} \\
& z_1 \cdot r + z_2 = 0
\end{aligned}$$

Damit ist die umgekehrte Richtung gezeigt, wonach $\underline{x} \in F(\hat{\gamma}, \hat{\tau}, \hat{s}_a)$ auch $(\underline{x}, x_r) \in E$ ist. Folglich hat die linke Seite von (3.28) Gültigkeit. Wenn dies so ist, muss die lineare Beziehung $\bar{\delta} = a \cdot (\bar{\rho} - r \cdot I) + \frac{\hat{\gamma} - \hat{s}_a}{(1 - \hat{\tau})} \cdot r \cdot I$ erhalten bleiben, was durch Gleichsetzen von (5.47) und (5.48)

mit (5.44) und (5.46) zu überprüfen ist. Hier für ist zunächst (5.48) in (5.47) einzusetzen

$$\cancel{Z} \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - z_1 \cdot (\bar{\rho} - r \cdot I) = 0 \tag{5.49}$$

⁹⁹ Vgl. dazu Fußnote 96.

und (5.46) in (5.44):

$$\cancel{\underline{z}} \cdot \underline{x} \cdot (1 - \hat{\gamma})^2 - w_1 \cdot [\bar{\underline{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) - r \cdot (1 - \hat{s}_a) \cdot \mathbf{I}] = 0 \quad (5.50)$$

Gleichsetzen von (5.49) mit (5.50) erzeugt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (\bar{\underline{p}} - r \cdot \mathbf{I}) &= w_1 \cdot [\bar{\underline{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) - r \cdot (1 - \hat{s}_a) \cdot \mathbf{I}] \\ \bar{\underline{p}} \cdot \left(\frac{z_1}{w_1} - (1 - \hat{\gamma}) \right) - r \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\frac{z_1}{w_1} - (1 - \hat{s}_a) \right) &= \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) \\ \bar{\underline{p}} \cdot \left(\frac{z_1}{w_1} - (1 - \hat{\gamma}) \right) - r \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\frac{z_1}{w_1} - (1 - \hat{\gamma}) \right) &= \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) - r \cdot \mathbf{I} \cdot (1 - \hat{s}_a) + r \cdot \mathbf{I} \cdot (1 - \hat{\gamma}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$(\bar{\underline{p}} - r \cdot \mathbf{I}) \cdot \frac{\left(\frac{z_1}{w_1} - (1 - \hat{\gamma}) \right)}{(1 - \hat{\tau})} + r \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{(\hat{\gamma} - \hat{s}_a)}{(1 - \hat{\tau})} = \underline{\delta}$$

$$\underline{\delta} = a \cdot (\bar{\underline{p}} - r \cdot \mathbf{I}) + \frac{\hat{\gamma} - \hat{s}_a}{1 - \hat{\tau}} \cdot r \cdot \mathbf{I}$$

Also ist $a = \left(\frac{z_1 - (1 - \hat{\gamma}) \cdot w_1}{w_1 \cdot (1 - \hat{\tau})} \right)$. Damit ist (3.28) und zugleich (3.29) nachgewiesen.

Beweis von Bedingung (3.30):¹⁰⁰

Ausgegangen sei von einem Portfolio $(\underline{x}, x_r) \in E$ und einem beliebigen (nicht effizienten) Portfolio \underline{y} , so dass vor Steuern

$$\begin{aligned} \underline{x}^T \cancel{\underline{z}} \underline{x} &= \underline{y}^T \cancel{\underline{z}} \underline{y}, \\ \underline{x}^T \cdot \bar{\underline{p}} + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} + x_r \cdot r &> \underline{y}^T \cdot \bar{\underline{p}} + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} + y_r \cdot r \end{aligned} \quad (5.52)$$

und nach Steuern

$$\underline{x}^T \cdot \bar{\underline{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) + x_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) > \underline{y}^T \cdot \bar{\underline{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) + y_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) \quad (5.53)$$

gilt. Setzt man die Beziehung $\underline{\delta} = \left(a \cdot (\bar{\underline{p}} - r \cdot \mathbf{I}) + \frac{\hat{\gamma} - \hat{s}_a}{(1 - \hat{\tau})} \cdot r \cdot \mathbf{I} \right)$ in (5.53) ein, geht mit Blick auf

$\hat{\tau}$ von proportionaler Besteuerung aus, und definiert $k_x = \underline{x}^T \cdot \bar{\underline{p}}$, $g_x = x_r \cdot r$ sowie $k_y = \underline{y}^T \cdot \bar{\underline{p}}$, $g_y = y_r \cdot r$, so erhält man:

¹⁰⁰ Vgl. zum analogen Vorgehen König [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990], S. 77-79.

$$\begin{aligned}
& \underline{x}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) + x_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) > \underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) + y_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) \\
& k_x + g_x - k_x \cdot \hat{\gamma} - g_x \cdot \hat{s}_a + \left((k_x \cdot a - \underline{x}^T \cdot a \cdot r \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}) + \underline{x}^T \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r \cdot I \right) > \quad . \quad (5.54) \\
& k_y + g_y - k_y \cdot \hat{\gamma} - g_y \cdot \hat{s}_a + \left((k_y \cdot a - \underline{y}^T \cdot a \cdot r \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}) + \underline{y}^T \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r \cdot I \right)
\end{aligned}$$

Wegen $\underline{x}^T \cdot I + x_r = 1 \Leftrightarrow \underline{x}^T \cdot I = (1 - x_r)$ und analog $\underline{y}^T \cdot I = (1 - y_r)$ können wir auch

$$\begin{aligned}
& k_x + g_x - k_x \cdot \hat{\gamma} - g_x \cdot \hat{s}_a + \left((k_x \cdot a - \underline{x}^T \cdot a \cdot r \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}) + \underline{x}^T \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r \cdot I \right) > \\
& k_y + g_y - k_y \cdot \hat{\gamma} - g_y \cdot \hat{s}_a + \left((k_y \cdot a - \underline{y}^T \cdot a \cdot r \cdot I) \cdot (1 - \hat{\tau}) + \underline{y}^T \cdot (\hat{\gamma} - \hat{s}_a) \cdot r \cdot I \right) > \quad (5.55)
\end{aligned}$$

schreiben, woraus nach einigen Umformungen

$$(k_x - k_y) \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) + (g_x - g_y) \cdot (1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau})) > 0 \quad (5.56)$$

wird. Daraus lässt sich die Untergrenze für a gewinnen:

$$1 - \hat{\gamma} + a \cdot (1 - \hat{\tau}) > 0 \Leftrightarrow a > \frac{\hat{\gamma} - 1}{1 - \hat{\tau}}. \quad (5.57)$$

Um von (5.56) zu (5.57) gelangen zu können, muss der Term $(k_x - k_y) + (g_x - g_y)$ positiv sein, damit sich das Ungleichheitszeichen im Übergang von der einen zur anderen Bedingung nicht umkehrt. Dass dem so ist, lässt sich mit (5.52) zeigen:

$$k_x + \underline{x}^T \cdot \underline{\delta} + g_x > k_y + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} + g_y. \quad (5.58)$$

Multipliziert man mit dem Einser-Vektor und bedenkt, dass $\underline{x}^T \cdot I = (1 - x_r)$ sowie $\underline{y}^T \cdot I = (1 - y_r)$ gilt, findet man:

$$\begin{aligned}
& k_x \cdot I + (1 - x_r) \cdot \underline{\delta} + x_r \cdot r \cdot I > k_y \cdot I + (1 - y_r) \cdot \underline{\delta} + y_r \cdot r \cdot I \\
& k_x \cdot I - x_r \cdot (\underline{\delta} - r \cdot I) - k_y \cdot I + y_r \cdot (\underline{\delta} - r \cdot I) > 0 \quad (5.59) \\
& (k_x - k_y) \cdot I + (\underline{\delta} - r \cdot I) \cdot (y_r - x_r) > 0
\end{aligned}$$

Da stets $\underline{\delta} > 0$ gilt¹⁰¹, ist die Dividendenrendite für die Richtung des Ungleichheitszeichens in (5.59) irrelevant. Man kann also schreiben:

¹⁰¹ Vgl. dazu Fußnote 49.

$$\begin{aligned} (k_x - k_y) \cdot I - r \cdot I \cdot (y_r - x_r) &> 0 \\ (k_x - k_y) \cdot I + (g_x - g_y) \cdot I &> 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

womit das positive Vorzeichen von $(k_x - k_y) + (g_x - g_y)$ nachgewiesen ist.

Beweis von Bedingung (3.31):

Die Nachsteuerrendite \bar{r}' eines beliebigen Portfolios \underline{y}

$$\underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot \underline{\delta} \cdot (1 - \hat{\tau}) + y_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) \quad (5.61)$$

wird für den Fall $a = \frac{\hat{\gamma} - 1}{1 - \hat{\tau}}$ zu

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} \cdot (1 - \hat{\gamma}) + \underline{y}^T \cdot \left(\frac{\hat{\gamma} - 1}{1 - \hat{\tau}} \cdot (\underline{\bar{p}} - r \cdot I) + \frac{\hat{\gamma} - \hat{s}_a}{1 - \hat{\tau}} \cdot r \cdot I \right) \cdot (1 - \hat{\tau}) + y_r \cdot r \cdot (1 - \hat{s}_a) = \\ &\underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} - \hat{\gamma} \cdot \underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} + \underline{y}^T \cdot \hat{\gamma} \cdot \underline{\bar{p}} - \underline{y}^T \cdot r \cdot I \cdot \hat{\gamma} - \underline{y}^T \cdot \underline{\bar{p}} + \underline{y}^T \cdot r \cdot I + \underline{y}^T \cdot \hat{\gamma} \cdot r \cdot I - \underline{y}^T \cdot \hat{s}_a \cdot r \cdot I \\ &+ y_r \cdot r - y_r \cdot r \cdot \hat{s}_a = \\ &\underline{y}^T \cdot r \cdot I - \underline{y}^T \cdot \hat{s}_a \cdot r \cdot I + y_r \cdot r - y_r \cdot r \cdot \hat{s}_a \end{aligned} \quad (5.62)$$

Da erneut $\underline{y}^T \cdot I = (1 - y_r)$ gilt, folgt:

$$\bar{r}' = (1 - y_r) \cdot r - (1 - y_r) \cdot \hat{s}_a \cdot r + y_r \cdot r - y_r \cdot r \cdot \hat{s}_a = r \cdot (1 - \hat{s}_a). \quad (5.63)$$

Literaturverzeichnis

Ang, James S. / Peterson, David R. [Yield, 1985]: Return, Risk, and Yield: Evidence from ex ante Data, in: JF, Vol. 40 (1985), S. 537-548.

Baetge, Jörg / Niemeyer, Kai / Kümmel, Jens [DCF-Verfahren, 2001]: Darstellung der Discounted-Cashflow-Verfahren (DCF-Verfahren) mit Beispiel, in: *Peemöller, Volker H.* (Hrsg.): Praxishandbuch der Unternehmensbewertung, Herne / Berlin 2001, S. 263-360.

Ballwieser, Wolfgang [Fragen, 2002]: Aktuelle Fragen der Unternehmensbewertung in Deutschland, in: Der Schweizer Treuhänder, 76. Jg. (2002), S. 746-750.

Ballwieser, Wolfgang [Steuern, 1995]: Unternehmensbewertung und Steuern, in: *Elschen, Rainer / Siegel, Theodor / Wagner, Franz* (Hrsg.): Unternehmenstheorie und Besteuerung, FS Dieter Schneider, Wiesbaden 1995, S. 15-37.

Black, Fischer [Equilibrium, 1972]: Capital Market Equilibrium with restricted Borrowing, in: JoB, Vol. 3 (1972), S. 444-455.

Black, Fischer / Scholes, Myron [Effects, 1974]: The Effects of Dividend Yield and Dividend Policy on Common Stock Prices and Returns, in: JFE, Vol. 1 (1974), S. 1-22.

Blume, Marshall E. [Evidence, 1980]: Stock Returns and Dividend Yields: Some more Evidence, in: Review of Economics and Statistics, Vol. 62 (1980), S. 567-577.

Brennan, Michael J. [Valuation, 1970]: Taxes, Market Valuation and corporate financial Policy, in: National Tax Journal, Vol. 23 (1970), S. 417-427.

Bundesministerium der Finanzen (Hrsg.) [Steuervergünstigungsabbaugesetz, 2003]: Erläuterungen zu den im Entwurf eines Gesetzes zum Abbau von Steuervergünstigungen und Ausnahmeregelungen (Steuervergünstigungsabbaugesetz - StVergAbG) vorgesehenen steuerlichen Maßnahmen – Stand: 21. Februar 2003, im Internet verfügbar unter <http://www.bundesfinanzministerium.de/Anlage17296/Erlaeuterungen-zu-den-im-Gesetzesbeschluss-BT-StVergAbG-vorgesehenen-steuerlichen-Massnahmen.pdf>, Stand 27. März 2003.

Bundesministerium der Finanzen (Hrsg.) [Zinsbesteuerung, 2003]: Entwurf eines Gesetzes zur Neuregelung der Zinsbesteuerung und zur Förderung der Steuerehrlichkeit (Zinsabgeltungssteuergesetz – ZinsAbG), Referentenentwurf vom 17. März 2003, im Internet verfügbar unter:

http://www.bundesfinanzministerium.de/Anlage17724/Referentenentwurf_Zinsabgeltung_Stand_17032003.pdf, Stand 24. März 2003.

Chen, Son-Nan [Rules, 1986]: Optimal Portfolio Selection under Differential Taxation, Simple Rules, in: *The Quarterly Review of Economics and Business*, Vol. 26 (1986), S. 6-16.

Copeland, Tom / Koller, Tim / Murrin, Jack [Valuation, 2000]: *Valuation, Measuring and Managing the Value of Companies*, 3. Aufl., New York u.a. 2000.

Deutscher Bundestag [Beschlussempfehlung, 2003]: Beschlussempfehlung des Vermittlungsausschusses zu dem Gesetz zum Abbau von Steuervergünstigungen und Ausnahmeregelungen (Steuervergünstigungsabbaugesetz – StVergAbG), Drucksache 15/841 vom 9. April 2003, Anlage, im Internet verfügbar unter: <http://dip.bundestag.de/btd/15/008/1500841.pdf>, Stand: 2. Mai 2003.

Drukarczyk, Jochen [Unternehmensbewertung, 2001]: *Unternehmensbewertung*, 3. Aufl., München 2001.

Drukarczyk, Jochen / Richter, Frank [Finanzentscheidungen, 1995]: Unternehmensgesamt- wert, anteilseignerorientierte Finanzentscheidungen und APV-Ansatz, in: *DBW*, 55. Jg. (1995), S. 559-580.

Friend, Irwin / Puckett, Marshall [Dividends, 1964]: Dividends and Stock Prices, in: *AER*, Vol. 54, S. 656-682.

Hess, Patrick J. [Behavior, 1982]: The Ex-Dividend Day Behavior of Stock Returns: Further Evidence on Tax Effects, in: *JF*, Vol. 37 (1982), S. 445-456.

Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V. [Wirtschaftsprüferhandbuch, 2002]: *Wirtschaftsprüferhandbuch 2002, Handbuch für Rechnungslegung, Prüfung und Beratung, Band II*, Düsseldorf 2002.

Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V. [IDW S. 1, 2000]: IDW Standard: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (IDW S 1), in: WPg, 53. Jg. (2000), S. 825-842.

König, Rolf Jürgen [Wurzel, 1997]: Ungelöste Probleme einer investitionsneutralen Besteuerung – Gemeinsame Wurzel unterschiedlicher neutraler Steuersysteme und die Berücksichtigung unsicherer Erwartungen, in: zfbf, 49. Jg. (1997), S. 42-63.

König, Rolf Jürgen [Kapitalmarktgleichgewicht, 1990]: Ausschüttungsverhalten von Aktiengesellschaften, Besteuerung und Kapitalmarktgleichgewicht, Hamburg 1990.

König, Wolfgang / Zeidler, Gernot W. [Behandlung, 1996]: Die Behandlung von Steuern bei der Unternehmensbewertung, in: DStR, 34. Jg. (1996), S. 1098-1103.

Kohl, Torsten / Schulte, Jörn [IDW S. 1]: Ertragswertverfahren und DCF-Verfahren, Ein Überblick vor dem Hintergrund des IDW S. 1, in: WPg, 53. Jg. (2000), S. 1147-1164.

Kruschwitz, Lutz [Investitionsrechnung, 2003]: Investitionsrechnung, 8., neu bearbeitete Aufl., München / Wien 2000, Kapitel 2.5 in der überarbeiteten Version, im Internet verfügbar unter: http://www.wiwiss.fu-berlin.de/kruschwitz/Studium/Dokumente/Steuern/buch_ir.pdf, Stand: 26. Februar 2003.

Litzenberger, Robert H. / Ramaswamy, Krishna [Effect, 1979]: The Effect of personal Taxes and Dividends on Capital Asset Prices, in: JFE, Vol 7 (1979), S. 163-195.

Litzenberger, Robert H. / Ramaswamy, Krishna [Dividends, 1980]: Dividends, short Selling Restrictions, tax-induced Investor Clienteles and Market Equilibrium, in: JF, Vol. 35 (1980), S. 469-482.

Litzenberger, Robert H. / Ramaswamy, Krishna [Tax, 1982]: The Effect of Dividends on Common Stock Prices: Tax Effects or Information Effects?, in: JF, Vol. 37 (1982), S. 429-443.

Löffler, Andreas [Steuersysteme, 1999]: Investitionsneutrale Steuersysteme bei zeitlich veränderbaren Steuersätzen, Arbeitspapier, Hannover 1999.

Long, John B. [Taxation, 1977]: Efficient Portfolio Choice with differential Taxation of Dividends and Capital Gains, in: JFE, Vol. 5 (1977), S. 25-53.

Merton, Robert C. [Derivation, 1972]: An analytic Derivation of the efficient Portfolio Frontier, in: JFQA, Vol. 7 (1972), S. 1851-1872.

Miller, Merton H. [Case, 1986]: Behavioral Rationality in Finance: The Case of Dividends, in: JoB, Vol. 59 (1986), S. 451-468.

Miller, Merton H. / Scholes, Myron S. [Taxes, 1982]: Dividends and Taxes: Some empirical Evidence, in: JPE, Vol. 90 (1982), S. 1118-1141.

Morgan, I. G. [Dividends, 1982]: Dividends and Capital Asset Prices, in: JF, Vol. 37 (1982), S. 1071-1086.

Moxter, Adolf [Grundsätze, 1983]: Grundsätze ordnungsmäßiger Unternehmensbewertung, 2., vollst. umgearb. Aufl., Wiesbaden 1983.

Richter, Frank [Taxes, 2002]: On the Relevance and the Irrelevance of personal Income Taxes for the Valuation of Equity Investments, Arbeitspapier, Witten / Herdecke 2002.

Rosenberg, Barr / Marathe, Vinay [Tests, 1979]: Tests of Capital Asset Pricing Hypotheses, in: Research in Finance, Vol. 1 (1979), S. 115-223.

Schultze, Wolfgang [Methoden, 2001]: Methoden der Unternehmensbewertung, Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Perspektiven, Düsseldorf 2001.

Tobin, James [Preference, 1958]: Liquidity Preference as Behavior towards Risk, in: Review of Economic Studies, Vo. 25 (1958), S. 65-86.

Weigel, Winfried [Steuern, 1989]: Steuern bei Investitionsentscheidungen, Ein kapitalmarkt-orientierter Ansatz, Wiesbaden 1989.

Münchner Betriebswirtschaftliche Beiträge

- 2000-01 **Hans-Peter Burghof / Christian Hofmann:** Executives' Compensation of European Banks -Disclosure, Sensitivity and their Impact on Bank Performance, Juni 2000.
- 2000-02 **Gunther Friedl:** Sequential Investment and Time to Build, Juli 2000.
- 2000-03 **Hans-Ulrich Küpper:** Cash Flow and Asset Based Interest Calculation in Cost Accounting, Juli 2000.
- 2000-04 **Nikolaus Franke / Christian Lüthje:** Studentische Unternehmensgründungen - dank oder trotz Förderung? - Kovarianzstrukturanalytische Erklärung studentischen Gründungsverhaltens anhand der Persönlichkeitskonstrukte "Risikopräferenz" und "Unabhängigkeitsstreben" sowie der subjektiven Wahrnehmung der Umfeldbedingungen, Juli 2000.
- 2000-05 **Burkhard Pedell:** Sunk Costs, Commitment and Strategy, August 2000.
- 2000-06 **Wolf Frowein:** On the Consistency of Mean-Lower Partial Moment Analysis and Expected Utility Maximisation, Oktober 2000.
- 2000-07 **Dietmar Harhoff / Joachim Henkel:** Profiting from voluntary information spillovers: How users benefit by freely revealing their innovations, Juli 2000.
- 2000-08 **Knieps Günter / Hans-Ulrich Küpper / Rene Langen:** Abschreibungen bei fallenden Wiederbeschaffungspreisen in stationären und nicht stationären Märkten, Dezember 2000.
- 2001-01 **Heinrich Martin Arnold:** Can great companies survive technology shocks? – A literature overview, Januar 2001.
- 2001-02 **Zsolt Berényi:** Accounting for illiquidity and non-normality of returns in the performance assessment, Juli 2001.
- 2001-03 **Michael Dobler:** Auditing Risk Management - A Critical Analysis of a German Particularity, Juli 2001.
- 2001-04 **Gunther Friedl / Robert Ott:** Anreizkompatible Gestaltung von Entgeltsystemen für Krankenhäuser, April 2001.
- 2001-05 **Hans-Ulrich Küpper:** Struktur und Teilsystem der Unternehmensrechnung, August 2001.

- 2001-06 **Claudia Küpper:** Service Innovation – A review of the state of the art, September 2001.
- 2001-07 **Christian Hofmann:** Anreizsysteme, September 2001.
- 2001-08 **Yvette Hofmann:** Sozialer Nutzen, Soziale Kosten, September 2001.
- 2001-09 **Gunther Friedl / Burkhard Pedell:** Anlagencontrolling, September 2001.
- 2001-10 **Hannes Wagner:** Der Wert interner Kapitalmärkte – empirische Überprüfung theoretischer Ansätze, Oktober 2001.
- 2001-11 **Nikolaus Franke:** How Communities Support Innovative Activities, Oktober 2001.
- 2001-12 **Joachim Henkel:** The Value of Weak Commitment, November 2001.
- 2001-13 **Gunther Friedl / Burkhard Pedell:** Integriertes Controlling mit SAP-Software, November 2001.
- 2001-14 **Heinrich Martin Arnold:** The recent history of the machine tool industry and the effects of technological change, November 2001.
- 2002-01 **Jörg Wiese:** Die Überprüfbarkeit individualistischer Risikozuschläge bei der Unternehmensbewertung, März 2002.
- 2002-02 **Gunther Friedl:** Growth Options, Organizational Slack, and Managerial Investment Incentives, April 2002.
- 2002-03 **Hans-Ulrich Küpper:** Internet Based Information Systems in the Non-Profit Sector, September 2002.
- 2002-04 **Hans-Ulrich Küpper:** Management Mechanisms and Financing of Higher Education in Germany, September 2002.
- 2002-05 **Joachim Henkel:** The Risk-Return Paradox for Strategic Management: Disentangling True and Spurious Effects, Oktober 2002.
- 2002-06 **Marc Gruber:** Research on Marketing in Emerging Firms: Key Issues and Open Questions, November 2002.
- 2002-07 **Joachim Henkel:** Open Source Software from Commercial Firms Tools, Complements, and Collective Invention, November 2002.
- 2002-08 **Hans-Martin Zademach:** The Firm in Economic Geography zu einer integrierten Konzeption der Unternehmung, November 2002.

- 2003-01 **Hans-Peter Burghof / Tilo Kraus:** Post-IPO performance and the exit of venture capitalists, Januar 2003.
- 2003-02 **Nikolaus Franke / Marc Gruber / Dietmar Harhoff / Joachim Henkel:** What you are is what you like - similarity biases in venture capitalists evaluations of start-up teams, Januar 2003.
- 2003-03 **Jörg Wiese:** Bedingungen für die Irrelevanz persönlicher Steuern im Capital Asset Pricing Model mit deutschem Steuersystem, Mai 2003.

Jörg Wiese

Universität München

Seminar für Rechnungswesen und Prüfung

Ludwigstr. 28/RG

Tel.: +49-89-2180-2164

Fax.: +49-89-2180-6327

E-mail: wiese@bwl.uni-muenchen.de

<http://www.rwp.bwl.uni-muenchen.de>



Workshop

"Unternehmensbewertung"

Hannover - Samstag, 28. Juni 2003

Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien

Finanzierungstheoretische Anmerkungen zu einem Grundlagenproblem der Unternehmensbewertung

Problemkreis 1:

"Aus Sicht risikoscheuer Kapitalanleger ist das Sicherheitsäquivalent unsicherer Einzahlungen kleiner als ihr Erwartungswert, das Sicherheitsäquivalent unsicherer Auszahlungen dagegen größer als ihr Erwartungswert. Im ersten Fall ist also ein Risikoabschlag vorzunehmen, im zweiten ein Risikozuschlag." (Kruschwitz, Der Betrieb 2001)

Problemkreis 2:

Zinsen, Zeit und Risiko: Separation oder Integration?

$$c_\tau = x_\tau^T \cdot (P_\tau + d_\tau) - x_{\tau+1}^T \cdot P_\tau + H_\tau \text{ Konsum der Periode } \tau$$

$$\tau = 0, \dots, T; x_0 = \bar{x}_0; x_{T+1} = 0$$

P WP-Preise

d WP-Ausschüttungen

x WP-Portfolio

H exogenes (nicht marktfähiges) Einkommen, u.a. Einkommen X aus
Bewertungsobjekt: $H = X + h$

$$E(u(c_0, \dots, c_T)) \rightarrow \max!$$

Der Wert - aus Verkäufer-Sicht - des Unternehmens mit dem Strom X ist jener **niedrigste Betrag** $V_0(X)$, der, in die Konsumbedingung für den Zeitpunkt 0 anstelle des Stroms X in den Folgezeitpunkten eingestellt, die Konsumbedingungen nicht verschlechtert.

$$c_0 = \bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) - x_1^T \cdot P_1 + h_0 + V_0(X)$$

$$c_\tau = x_\tau^T \cdot (P_\tau + d_\tau) - x_{\tau+1}^T \cdot P_\tau + h_\tau$$

$$\tau = 1, \dots, T; x_0 = \bar{x}_0; x_{T+1} = 0$$

$h = H - X$ sonstiges nicht marktfähiges Einkommen

$$E(u(c_0, \dots, c_T)) \rightarrow \max!$$

⁴Notwendige Bedingungen für das Optimum:

26.06.2003

$$P_\tau \cdot \mathbf{E}(\partial_\tau u | \mathcal{A}_\tau) = \mathbf{E}\left(\left(P_{\tau+1} + d_{\tau+1}\right) \cdot \partial_{\tau+1} u | \mathcal{A}_\tau\right)$$

$$\tau = 0, \dots, T - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) - x_1^T \cdot P_1 + X_0 + h_0 \\ c_\tau = x_\tau^T \cdot (P_\tau + d_\tau) - x_{\tau+1}^T \cdot P_\tau + X_\tau + h_\tau \end{array} \right\}$$

bzw.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) - x_1^T \cdot P_1 + V_0(X) + h_0 \\ c_\tau = x_\tau^T \cdot (P_\tau + d_\tau) - x_{\tau+1}^T \cdot P_\tau + h_\tau \end{array} \right\}$$

Existiert für das relevante Optimierungsproblem eine optimale Lösung, dann ist der Markt **arbitragefrei**:

$$P_\tau = \mathbf{E} \left\{ \sum_{\theta=\tau+1}^t \frac{Q_\theta}{Q_\tau} \cdot d_\theta + \frac{Q_t}{Q_\tau} \cdot P_t \mid \mathcal{A}_\tau \right\}$$

Spanning liegt vor, wenn es zu jedem Strom X_t eine Portfolio-Strategie $y(t)$ gibt mit:

$$y(t)_{\tau+1}^T \cdot P_\tau = y(t)_\tau^T \cdot (P_\tau + d_\tau)$$

$$(\tau = 1, \dots, t-1)$$

$$X_t = y(t)_t^T \cdot (P_t + d_t)$$

Ist der Markt arbitragefrei und liegt Spanning vor, so gilt (**Realoptionsansatz!**):

$$V_0(X) = X_0 + \sum_{\tau=1}^T y(\tau)_1^T \cdot P_0 = X_0 + \sum_{\tau=1}^T \mathbf{E}(Q_\tau \cdot X_\tau)$$

Gliederung:

- Sicherheitsäquivalente und Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit und Spanning
- Zum Verhältnis von Risiko und Zeit bei Arbitragefreiheit und Spanning
- Sicherheitsäquivalente und Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit, aber ohne Spanning: Ein spezieller Ein-Periodenfall
- Schlussbemerkungen

Definition des Sicherheitsäquivalentes (Preisgrenze)

Entscheidungsproblem mit Bew.-Obj.

$$c_0(\mathbf{X}) = \bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) - x_1^T \cdot P_1 + h_0 + \mathbf{X}_0$$

$$c_\tau(\mathbf{X}) = x_\tau^T \cdot (P_\tau + d_\tau) - x_{\tau+1}^T \cdot P_\tau + h_\tau + \mathbf{X}_\tau$$

$$\tau = 0, \dots, T; x_0 = \bar{x}_0; x_{T+1} = 0$$

$$U^{**}(\mathbf{X}) = \max \left\{ \mathbb{E} \left(u(c_0(\mathbf{X}), \dots, c_T(\mathbf{X})) \right) \mid x_0, x_1, \dots, x_T \right\}$$

Entscheidungsproblem ohne Bew.-Obj.

$$c_0(\mathbf{Z}) = \bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) - x_1^T \cdot P_1 + h_0 + \mathbf{Z}$$

$$c_\tau(\mathbf{Z}) = x_\tau^T \cdot (P_\tau + d_\tau) - x_{\tau+1}^T \cdot P_\tau + h_\tau$$

$$\tau = 1, \dots, T; x_0 = \bar{x}_0; x_{T+1} = 0$$

$$U^*(\mathbf{Z}) = \max \left\{ \mathbb{E} \left(u(c_0(\mathbf{Z}), \dots, c_T(\mathbf{Z})) \right) \mid x_0, x_1, \dots, x_T \right\}$$

Definition(en)

$$V_0(\mathbf{X}) = \inf \left\{ z \in \mathbb{R} \mid U^*(z) \geq U^{**}(\mathbf{X}) \right\} \quad V_0(\mathbf{X}) = \sup \left\{ z \in \mathbb{R} \mid U^*(z) \leq U^{**}(\mathbf{X}) \right\}$$

Sicherheitsäquivalente und Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit und Spanning

Der Schlüssel für die Bewertung ist der **stochastische Diskontierungsfaktor**; er ist ein positiver Prozess

$$Q_t > 0 \quad \text{mit} \quad \frac{1}{(1 + r_{\tau,t})^{t-\tau}} = \mathbf{E} \left(\frac{Q_t}{Q_\tau} \mid \mathcal{A}_\tau \right) \leq 1$$

d.h. (positive Zinssätze!)

$$Q_\tau \geq \mathbf{E}(Q_t \mid \mathcal{A}_\tau) \quad (\text{Supermartingaleigenschaft!})$$

Der Unternehmenswert ist wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} V_0(\mathbf{X}) &= X_0 + \sum_{\tau=1}^T \mathbf{E}(Q_\tau \cdot X_\tau) \\ &= X_0 + \sum_{\tau=1}^T \{ \mathbf{E}(Q_\tau) \cdot \mathbf{E}(X_\tau) + \text{cov}(Q_\tau, X_\tau) \} \\ &= X_0 + \sum_{\tau=1}^T \frac{1}{(1 + r_{0,\tau})^\tau} \left\{ \mathbf{E}(X_\tau) + \text{cov} \left((1 + r_{0,\tau})^\tau \cdot Q_\tau, X_\tau \right) \right\} \end{aligned}$$

Sicherheitsäquivalente und Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit und Spanning

Offenbar kann man als **Sicherheitsäquivalent** den jeweiligen sicheren Betrag

$$S_{\tau}(X) = E(X) + \text{cov}\left(\left(1 + r_{0,\tau}\right)^{\tau} \cdot Q_{\tau}, X\right)$$

in τ anstelle des unsicheren ebenfalls im Zeitpunkt τ gezahlten Betrages X ansetzen. Als **Risikoprämie** hat man daher nach gängigem Verständnis den Wert

$$RP_{\tau}(X) = -\text{cov}\left(\left(1 + r_{0,\tau}\right)^{\tau} \cdot Q_{\tau}, X\right)$$

anzusehen.

Mit dem **Forward-Bewerter**:

$$W_{\tau} := \left(1 + r_{0,\tau}\right)^{\tau} \cdot Q_{\tau} \quad (\text{Man beachte: } E(W_{\tau}) = 1)$$

gilt also:

$$RP_{\tau}(X) = -\text{cov}(W_{\tau}, X) \quad \text{und} \quad S_{\tau}(X) = E(X) + \text{cov}(W_{\tau}, X)$$

Sicherheitsäquivalente und Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit und Spanning

Andere Variante: Der folgende **Futures-Bewerter** ist ein Martingal

$$F_{\tau} = Q_{\tau} \cdot \prod_{\theta=0}^{\tau-1} (1 + r_{\theta})$$

Hier gilt:

$$RP_{\tau}(X) = -\text{cov} \left(\frac{(1 + r_{0,\tau})^{\tau}}{\prod_{\theta=0}^{\tau-1} (1 + r_{\theta})} F_{\tau}, X \right) \text{ und } S_{\tau}(X) = E(X) + \text{cov} \left(\frac{(1 + r_{0,\tau})^{\tau}}{\prod_{\theta=0}^{\tau-1} (1 + r_{\theta})} F_{\tau}, X \right)$$

Es gilt

$$W_{\tau} = F_{\tau}$$

wenn der Zinsverlauf **deterministisch** ist.

Wir geben ein Beispiel, das u.A. verdeutlicht, dass man über das Vorzeichen der Risikoprämie keine A-priori-Aussage machen kann.

Wir benutzen dazu wegen des allgemeinen Bekanntheitsgrades ein **Binomialmodell**.

Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit ohne Spanning

Warum ist das Problem so schwierig?

Die Lösung ergibt sich erst aus dem Vergleich der Optimallösungen zweier Optimierungsprobleme, die im allgemeinen Fall auch noch **dynamisch** sind.

Wir wählen, um wenigstens grundlegende Einsichten zu gewinnen, ein Zwei-Zeitpunkte-Modell:

$$P_0 = \frac{1}{1+r_0} \cdot E \left((P+d) \cdot \frac{\partial_1 u}{E(\partial_0 u)} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) - x^T \cdot P_0 - \frac{x^0}{1+r_0} \\ c_1 = x^T \cdot (P+d) + x^0 + X + h \end{array} \right.$$

bzw.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) - x^T \cdot P_0 - \frac{x^0}{1+r_0} + V_0(X) \\ c_1 = x^T \cdot (P+d) + x^0 + h \end{array} \right.$$

Wir wählen als Nebenbedingung

$$c_0 = c^* = \text{const}$$

Die Nutzenfunktion sei zeitadditiv.

Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit ohne Spanning

Wir spezialisieren weiter auf das **hybride Modell** (exponentielle Nutzenfunktion und Normalverteilung). Das läuft auf den Vergleich der Optimalwerte der folgenden beiden Zielfunktionen hinaus:

$$E(c_1^U) - \frac{1}{2} a \text{var}(c_1^U)$$

$$c_1^U = x^T \cdot (P + d - (1 + r_0) \cdot P_0) + X + h + (1 + r_0) \cdot (\bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) - c^*)$$

$$E(c_1^S) - \frac{1}{2} a \text{var}(c_1^S)$$

$$c_1^S = x^T \cdot (P + d - (1 + r_0) \cdot P_0) + h + (1 + r_0) \cdot (\bar{x}_0^T \cdot (P_0 + d_0) + V_0(X) - c^*)$$

Die Optimallösungen sind bekanntlich (Mayers/Brito) durch folgende Beziehungen gegeben:

$$E(P + d) - (1 + r_0) P_0 = a \cdot \text{COV}(P + d, P + d) \cdot x_U + a \cdot \text{COV}(P + d, X + h)$$

$$E(P + d) - (1 + r_0) P_0 = a \cdot \text{COV}(P + d, P + d) \cdot x_S + a \cdot \text{COV}(P + d, h)$$

$$0 = \text{COV}(P + d, P + d) \cdot (x_U - x_S) + \text{COV}(P + d, X)$$

Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit ohne Spanning

Man beachte:

$$c_1^U - c_1^S = (\mathbf{x}_U - \mathbf{x}_S)^T \cdot (P + d - (1 + r_0) \cdot P_0) + X - (1 + r_0) \cdot V_0(X)$$

Die Definitionsbedingung für den Unternehmenswert aus Verkäufersicht lautet dann

$$E(c_1^U - c_1^S) = \frac{1}{2} a \cdot [\text{var}(c_1^U - c_1^S) + 2 \cdot \text{cov}(c_1^U - c_1^S, c_1^S)]$$

Einsetzen ergibt:

$$V_0(X) = \frac{1}{1 + r_0} \left\{ E(X) + (\mathbf{x}_U - \mathbf{x}_S)^T \cdot (E(P + d) - (1 + r_0) \cdot P_0) - \frac{1}{2} a \cdot [\text{var}(c_1^U - c_1^S) + 2 \cdot \text{cov}(c_1^U - c_1^S, c_1^S)] \right\}$$

Weiter wissen wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_U - \mathbf{x}_S &= -C^{-1} \text{COV}(P + d, X) \\ \mathbf{x}_S &= \frac{1}{a} C^{-1} \left\{ E(P + d) - (1 + r_0) P_0 \right\} - C^{-1} \cdot \text{COV}(P + d, h) \end{aligned}$$

Unternehmenswerte bei Arbitragefreiheit ohne Spanning

Der extremste Fall von Nicht-Spanning ist

$$\text{COV}(P + d, X) = 0 \Rightarrow x_U - x_S = 0$$

In diesem Fall gilt für den Unternehmenswert:

$$V_0(X) = \frac{1}{1+r_0} \cdot \left\{ \mathbf{E}(X) - \frac{1}{2}a \cdot [\mathbf{var}(X+h) - \mathbf{var}(h)] \right\}$$

Das Vorzeichen der Risikoprämie ist auch hier nur im Einzelfall festzustellen:

$$\begin{aligned} RP_1(X) &= \frac{1}{2}a \cdot [\mathbf{var}(X+h) - \mathbf{var}(h)] \\ &= \frac{1}{2}a \cdot [\mathbf{var}(X) + 2\mathbf{cov}(X,h)] \\ &= \frac{1}{2}a \cdot \mathbf{var}(X) \cdot \left[1 + 2\mathbf{corr}(X,h) \frac{\mathbf{std}(h)}{\mathbf{std}(X)} \right] \end{aligned}$$

Zinsen, Zeit und Risiko: Separation oder Integration?

Wir betrachten den Zeitbezug der Risikoprämie und des Sicherheitsäquivalents:

$$RP_{\tau}(X) = -\text{cov} \left(\frac{(1+r_{0,\tau})^{\tau}}{\prod_{\theta=0}^{\tau-1} (1+r_{\theta})} F_{\tau}, X \right) \text{ und } S_{\tau}(X) = E(X) + \text{cov} \left(\frac{(1+r_{0,\tau})^{\tau}}{\prod_{\theta=0}^{\tau-1} (1+r_{\theta})} F_{\tau}, X \right)$$

Vorschlag zur Konzeption: Die Risikoprämie kann dann als von der Zeit separierbar gelten, wenn derselbe Zahlungsstrom, eine Periode später zur Auszahlung kommend, dann dieselbe Risikoprämie aufweist.

Präzisierung:

Sei der Zahlungsstrom \mathcal{A}_{τ} -messbar. Separierbarkeit, wenn $RP_{\tau}(X) = RP_{\tau+1}(X)$, d.h.

$$\text{cov} \left(\frac{(1+r_{0,\tau})^{\tau}}{\prod_{\theta=0}^{\tau-1} (1+r_{\theta})} F_{\tau}, X \right) = \text{cov} \left(\frac{(1+r_{0,\tau+1})^{\tau+1}}{\prod_{\theta=0}^{\tau} (1+r_{\theta})} F_{\tau+1}, X \right)$$

Zinsen, Zeit und Risiko: Separation oder Integration?

$$\begin{aligned} \text{COV} \left(\frac{(1+r_{0,\tau+1})^{\tau+1}}{\prod_{\theta=0}^{\tau} (1+r_{\theta})} F_{\tau+1}, X \right) &= \mathbb{E} \left\{ \frac{(1+r_{0,\tau+1})^{\tau+1}}{\prod_{\theta=0}^{\tau} (1+r_{\theta})} F_{\tau+1} \cdot (X - \mathbb{E}(X)) \right\} = \\ &= \mathbb{E} \left\{ (X - \mathbb{E}(X)) \cdot \mathbb{E} \left[\frac{(1+r_{0,\tau+1})^{\tau+1}}{\prod_{\theta=0}^{\tau} (1+r_{\theta})} F_{\tau+1} \mid \mathcal{A}_{\tau} \right] \right\} = \mathbb{E} \left\{ (X - \mathbb{E}(X)) \cdot \frac{1 + {}_0r_{\tau,\tau+1}}{1+r_{\tau}} \cdot \frac{(1+r_{0,\tau})^{\tau}}{\prod_{\theta=0}^{\tau-1} (1+r_{\theta})} \cdot \mathbb{E}[F_{\tau+1} \mid \mathcal{A}_{\tau}] \right\} = \\ &= \text{COV} \left(\frac{(1+r_{0,\tau})^{\tau}}{\prod_{\theta=0}^{\tau-1} (1+r_{\theta})} \cdot F_{\tau}, \frac{1 + {}_0r_{\tau,\tau+1}}{1+r_{\tau}} \cdot X \right), \text{ da } F_{\tau} \text{ ein Martingal ist.} \end{aligned}$$

Hinreichend für die Separierbarkeit von Risikoprämie und Zeit ist also ein deterministischer Zinsverlauf:

$$r_{\tau} = {}_0r_{\tau,\tau+1}$$

Zinsen, Zeit und Risiko: Separation oder Integration?

Ist eine sinnvolle Zerlegung der Risikoprämie gemäß sich im Zeitablauf auflösendem Risiko möglich?

Wir werden sehen, dass die affirmative Beantwortung dieser Frage eine Variante der Separierbarkeit ist. Wir zerlegen:

$$\begin{aligned}
 X_t &= \mathbf{E}(X_t) + \sum_{\tau=1}^t Y_\tau(t) \\
 Y_\tau(t) &= \mathbf{E}(X_t | \mathcal{A}_\tau) - \mathbf{E}(X_t | \mathcal{A}_{\tau-1}) \\
 \mathcal{A}_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow \mathbf{E}(X_t | \mathcal{A}_0) = \mathbf{E}(X_t)
 \end{aligned}$$

Die Bestandteile $Y_\tau(t)$ des Stroms X_t sind jeweils zum Zeitpunkt τ beobachtbar; in diesem Sinne löst sich die Unsicherheit über den Gesamtstrom schrittweise durch Kenntnisnahme von $Y_\tau(t)$ auf. Die Summanden sind unkorreliert ("orthogonal") und haben einen Erwartungswert von Null. Die Risikoprämie für X_t rechnet sich nun zu:

$$RP_t(X_t) = -\text{cov}(W_t, X_t) = -\sum_{\tau=1}^t \text{cov}(W_t, Y_\tau(t)) = \sum_{\tau=1}^t RP_t(Y_\tau(t))$$

d.h. sie ergibt sich als Summe der Risikoprämien für die schrittweise erkennbaren Teilrisiken.

Zinsen, Zeit und Risiko: Separation oder Integration?

Ist nun weiter die Zinsentwicklung deterministisch, d.h. sind Risikoprämie und Zeit separierbar, dann ist die Gesamtrisikoprämie gleich der Summe der Teilrisikoprämien, d.h. der im Auflösungszeitpunkt zu zahlenden Prämien für jene Risiken, die sich im betrachteten Zeitpunkt gerade auflösen:

$$RP_t(X_t) = \sum_{\tau=1}^t RP_t(Y_\tau(t)) = \sum_{\tau=1}^t RP_\tau(Y_\tau(t))$$

Für den resultierenden Unternehmenswert ist es gleichgültig, ob die betreffende Teilrisikoprämie im Zeitpunkt τ oder erst im Zeitpunkt t gezahlt wird, da die Zahlung noch der Abzinsung zu unterwerfen ist. Auf- und Abzinsen sind aber wegen des deterministischen Zinsverlaufes wechselseitig invers.

Ordnet man jedem Zeitpunkt die Teilrisikoprämien zu, die für jene Teilrisiken gezahlt werden, die in gerade diesem Zeitpunkt zur Auflösung kommen, so lässt sich der gesamte Unternehmenswert wie folgt schreiben:

$$V_0(X) = X_0 + \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+r_{0,t})^t} \cdot \left\{ E(X_t) - \sum_{\tau=t}^T RP_t(Y_t(\tau)) \right\}$$

Zinsen, Zeit und Risiko: Separation oder Integration?

oder so:

$$V_0(X) = X_0 + \sum_{t=1}^T \frac{E(X_t)}{\left(1 + r_{0,t}\right)^t \cdot \left[1 - \sum_{\tau=t}^T RP_t \left(\frac{Y_t(\tau)}{E(X_t)}\right)\right]^{-1}}$$

In dieser Darstellung werden die dem betreffenden Zeitpunkt zuzuordnenden Teilrisikoprämien als prozentualer Aufschlag (Abschlag) auf den (von dem) Aufzinsungsfaktor des betreffenden Zeitpunktes verrechnet. Eine "Verteilung" auf den Zeitraum durch Verrechnung im (welchem?) Zinssatz wäre nicht zu rechtfertigen. Allenfalls nachvollziehbar wäre die "Kruschwitz-Variante" (ebenfalls 2001), wenn man sie konsequent auf Teilrisikoprämien des betreffenden Zeitpunktes übertrüge:

$$V_0(X) = X_0 + \sum_{t=1}^T \frac{E(X_t)}{\left(1 + r_{0,t-1}\right)^{t-1} \cdot \left[\left(1 + r_{t,t-1}\right) \left[1 - \sum_{\tau=t}^T RP_t \left(\frac{Y_t(\tau)}{E(X_t)}\right)\right]^{-1} \right]}$$

Zinsen, Zeit und Risiko: Separation oder Integration?

$$r_{t-1}^* = \frac{1 + {}_0r_{t,t-1}}{1 - \sum_{\tau=t}^T RP_t \left(\frac{Y_t(\tau)}{E(X_t)} \right)} - 1 = \frac{{}_0r_{t,t-1} + \sum_{\tau=t}^T RP_t \left(\frac{Y_t(\tau)}{E(X_t)} \right)}{1 - \sum_{\tau=t}^T RP_t \left(\frac{Y_t(\tau)}{E(X_t)} \right)}$$

wäre dann der riskoadjustierte Zinssatz für die letzte Teilperiode. Der Unternehmenswert ergäbe sich zu:

$$V_0(X) = X_0 + \sum_{t=1}^T \frac{E(X_t)}{\left(1 + r_{0,t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + r_{t-1}^*\right)}$$

Bemerkenswert wäre hier der Umstand, dass die in t erwartete Zahlung mit einem Zinssatz diskontiert würde, der alle Risiken des Bewertungsobjektes reflektiert, die sich in der betrachteten Periode auflösen.

Es lässt sich vieles erzwingen, aber nur wenig rechtfertigen.



Universität Passau

Lehrstuhl für Finanzierung

Stochastischer Diskontierungsfaktor im Binomialmodell

Ein Beispiel:

Wir geben hier eine explizite Konstruktion des stochastischen Diskontierungsfaktors, des Forward- und Futures-Bewerters. Die folgende Konstruktion erlaubt im Prinzip auch die Bewertung **pfadabhängiger** Titel.

Die Konstruktion bedient sich der (inversen) **Binärdarstellung natürlicher Zahlen** zur systematischen Erfassung aller möglichen Zustände/Zustandsfolgen; drei Beispiele:

$$\text{binaer}(5,7)^T = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$\text{binaer}(99,7)^T = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$$

$$\text{binaer}(127,7)^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

Das allgemeine Modell für den Kursverlauf des Basiswertpapiers lautet in dieser Terminologie:

$$P_{t+1}(n + 2^t) = P_t(n) \cdot (1 + r_t(n)) \cdot u_t(n)$$

$$P_{t+1}(n) = P_t(n) \cdot (1 + r_t(n)) \cdot d_t(n)$$

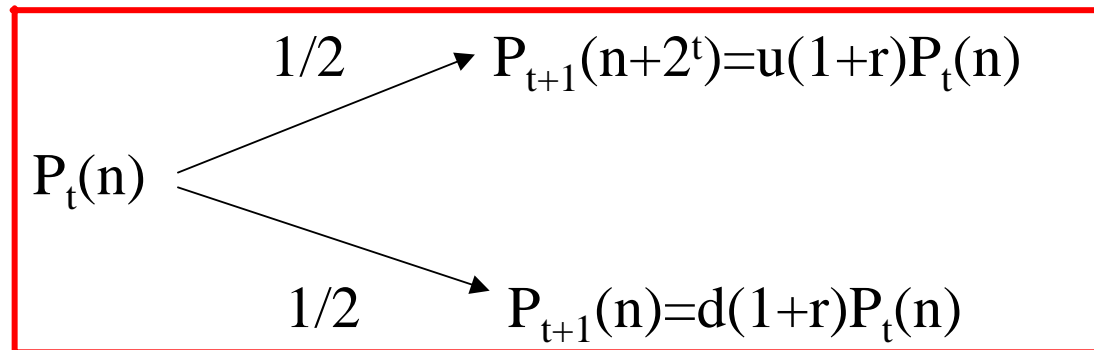
$$n = 0, \dots, 2^t - 1; u_t(n) > 1; d_t(n) < 1$$

Wir verwenden die folgende einfache Spezifikation mit insbesondere konstantem Zinssatz:

$$P_{t+1}(n + 2^t) = P_t(n) \cdot (1 + r) \cdot u$$

$$P_{t+1}(n) = P_t(n) \cdot (1 + r) \cdot d$$

$$n = 0, \dots, 2^t - 1; u > 1; d < 1$$



Daraus ergeben sich bei Gleichwahrscheinlichkeit der Zustände:

Der "Futures-Bewerter" = "Forward-Bewerter":

$$\text{Eval}(n, t, u, d) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \text{binaer}(n, t) \\ k \leftarrow \text{zeilen}(a) - 1 \\ \text{Res} \leftarrow 1 \\ \Delta \leftarrow u - d \\ u_1 \leftarrow \frac{1 - d}{\Delta} \\ d_1 \leftarrow \frac{u - 1}{\Delta} \\ \text{for } i \in 0..k \\ \quad \text{Res} \leftarrow u_1^{a_i} \cdot d_1^{1-a_i} \cdot \text{Res} \\ \text{Res} \cdot 2^t \end{array} \right.$$

Der relevante Preisverlauf:

$$\text{Preis}(n, t, u, d, r) := \left| \begin{array}{l} \text{Res} \leftarrow 1 \\ a \leftarrow \text{binaer}(n, t) \\ k \leftarrow \text{zeilen}(a) - 1 \\ u_0 \leftarrow u \cdot r \\ d_0 \leftarrow d \cdot r \\ \text{for } i \in 0..k \\ \quad \text{Res} \leftarrow \text{Res} \cdot (u_0)^{a_i} \cdot (d_0)^{1-a_i} \\ \text{Res} \end{array} \right.$$

Beispieldaten:

$t := 10$ $u := 1.1$ $d := 0.95$ $r := 1.01$ $P_0 := 100$

$i := 0..2^t - 1$ $E_i := \text{Eval}(i, t, u, d)$ $P_i := P_0 \cdot \text{Preis}(i, t, u, d, r)$

Futures-Bewerter:

Stochastischer Diskontierungsfaktor:

Preis:

$$Q := r^{-t} \cdot E$$

$$E^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	17.758	8.879	8.879	4.439	8.879	4.439	4.439	2.22	8.879	4.439

$$Q^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	16.07584	8.03792	8.03792	4.01896	8.03792	4.01896	4.01896	2.00948

$$P^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	66.138	76.581	76.581	88.672	76.581	88.672	88.672	102.673	76.581

Bewertungsprobe mit Futures-Bewerter:

$$2^{-t} \cdot r^{-t} \cdot E \cdot P = 100$$

$$P_0 = 100$$

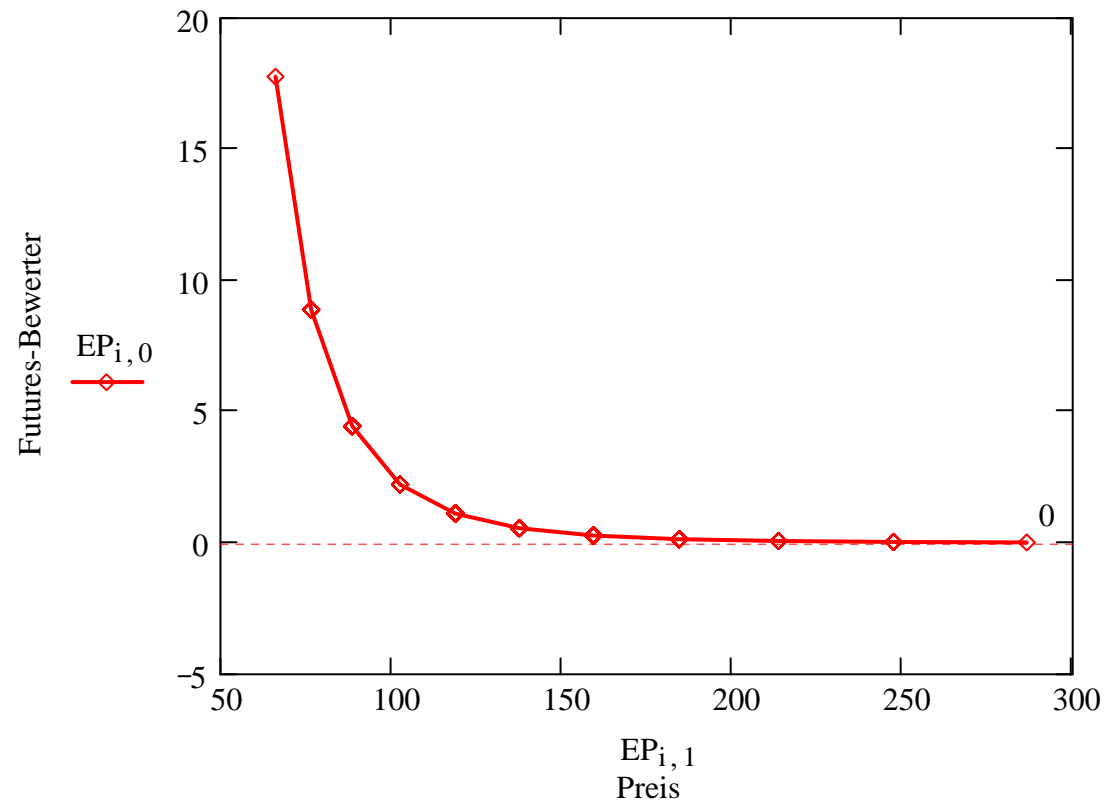
Bewertungsprobe mit stochastischem
Diskontierungsfaktor:

$$2^{-t} \cdot Q \cdot P = 100$$

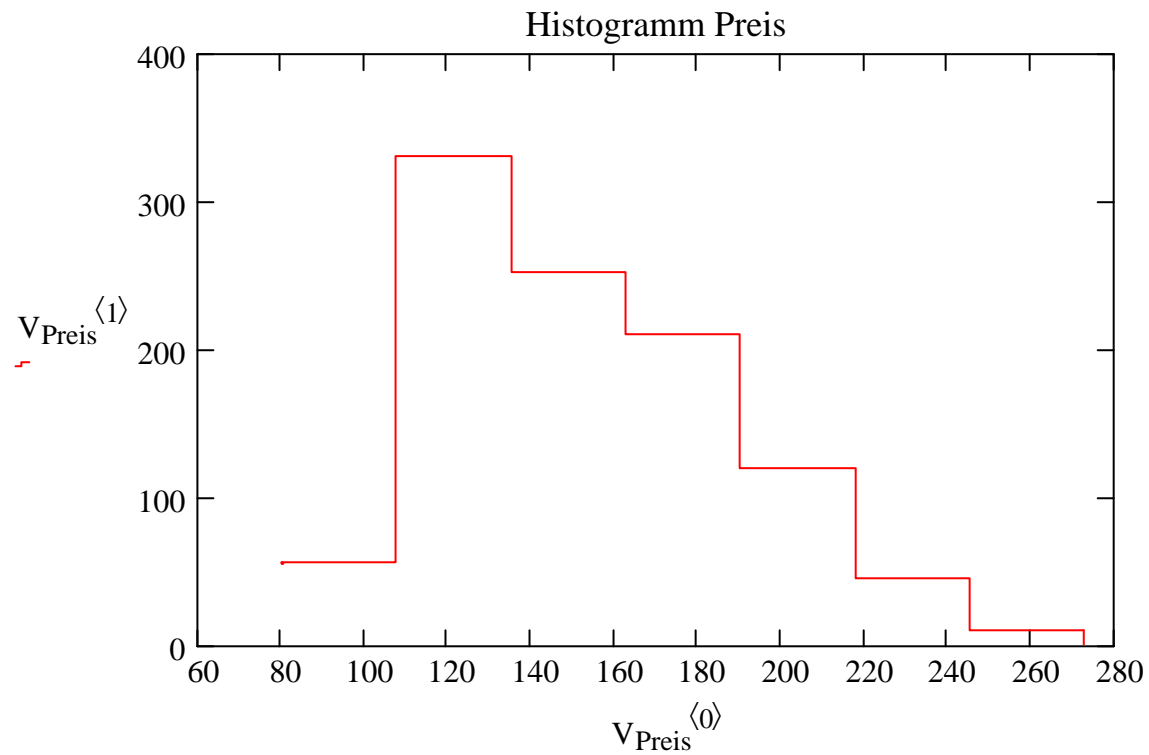
$$P_0 = 100$$

Der Zusammenhang zwischen Futures-Bewerter und Preis

$EP := \text{spsort}(\text{erweitern}(E, P), 1)$

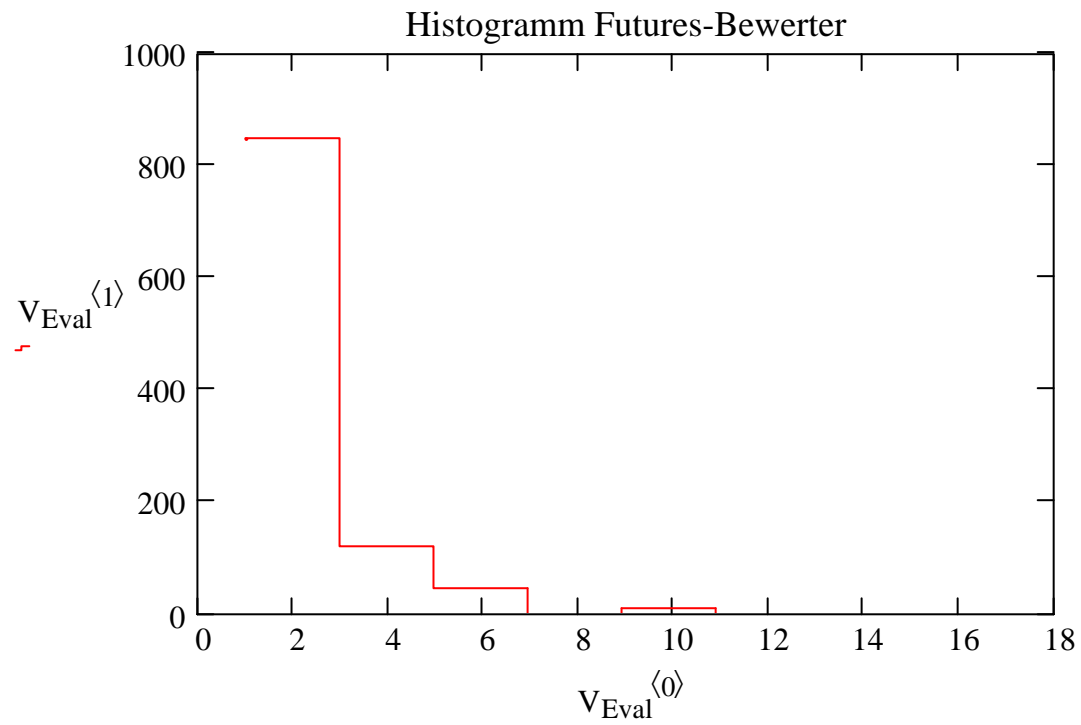


$$V_{\text{Preis}} := \text{Histo}(P, t - 2)$$



$$V_{\text{Preis}} = \begin{pmatrix} 79.911 & 56 \\ 107.458 & 330 \\ 135.004 & 252 \\ 162.551 & 210 \\ 190.097 & 120 \\ 217.644 & 45 \\ 245.191 & 10 \\ 272.737 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\text{Eval}} := \text{Histo}(E, t - 1)$$



$$V_{\text{Eval}} = \begin{pmatrix} 1.003 & 848 \\ 2.974 & 120 \\ 4.945 & 45 \\ 6.916 & 0 \\ 8.888 & 10 \\ 10.859 & 0 \\ 12.83 & 0 \\ 14.801 & 0 \\ 16.772 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu bewertende(r) Zahlungsstrom(ströme) im Zeitpunkt t (gegriffen (gleichverteilt simuliert)):

$$R_1 := \text{runif}(2^{t-1}, 0, 500)$$

$$R_2 := \text{runif}(2^{t-1}, 500, 1000)$$

$$X_1 := \text{stapeln}(R_1, R_2)$$

$$X_2 := \text{stapeln}(R_2, R_1)$$

Histo(X_1, t) =

	0	1
0	50.399	119
1	150.321	81
2	250.244	102
3	350.167	116
4	450.089	94
5	550.012	96
6	649.935	115
7	749.857	93
8	849.78	99
9	949.703	108

Histo(X_2, t) =

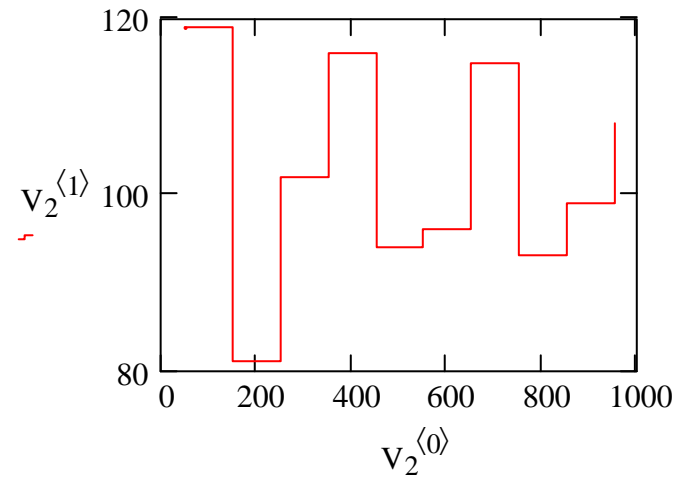
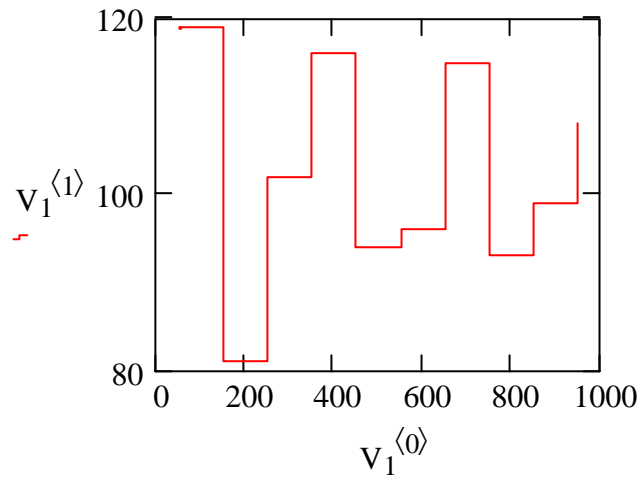
	0	1
0	50.399	119
1	150.321	81
2	250.244	102
3	350.167	116
4	450.089	94
5	550.012	96
6	649.935	115
7	749.857	93
8	849.78	99
9	949.703	108

Es liegen zwei Zahlungsströme mit gleicher Wahrscheinlichkeitsverteilung vor.

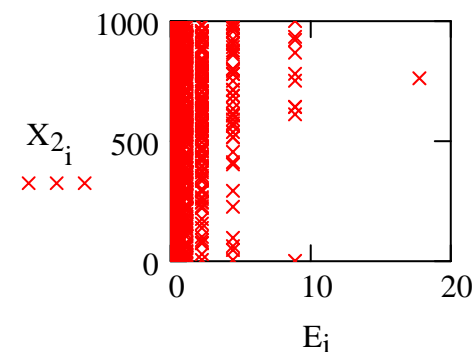
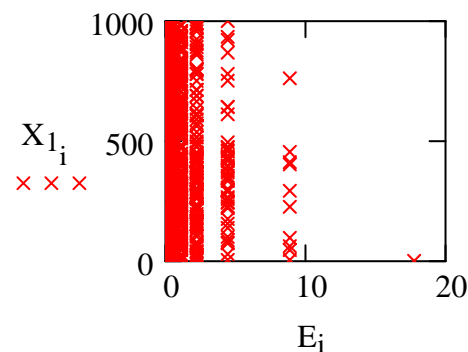
Man beachte die Histogramme:

$$V_1 := \text{Histo}(X_1, t)$$

$$V_2 := \text{Histo}(X_2, t)$$



aber mit unterschiedlichem Verhalten relativ zum Futures-Bewerter:



Risikoprämien und Sicherheitsäquivalente der beiden Ströme unterscheiden sich:

$$\text{cov}(X_1^T, E^T, \mu) = (-80.396)$$

$$\text{cov}(X_2^T, E^T, \mu) = (88.955)$$

$$\text{erw}(X_1^T, \mu) = (499.104)$$

$$\text{erw}(X_2^T, \mu) = (499.104)$$

$$\text{Sicher}_1 := \text{erw}(X_1^T, \mu) + \text{cov}(X_1^T, E^T, \mu)$$

$$\text{Sicher}_2 := \text{erw}(X_2^T, \mu) + \text{cov}(X_2^T, E^T, \mu)$$

$$\text{Sicher}_1 = (418.708)$$

$$\text{Sicher}_2 = (588.059)$$

Corporate Cash Holdings and Conglomerate Discount: Is there a Distortion in Germany?

Prof. Dr. Bernhard Schwetzler, Dr. Carsten Reimund

AGENDA

- ¶ Motivation and contribution of the paper
- ¶ Berger/Ofek methodology and cash distortion
- ¶ Data and research design
- ¶ Results and implications

Existing empirical evidence

- firms operating in multiple lines of business (i. e. conglomerates) have significantly lower total values than matched portfolios of firms focussing on only one business segment (i. e. stand alone (e. g. Lang/Stulz 1994, Berger/Ofek 1995, Servaes 1996)



- average conglomerate discount of 13-15% for US data
- discount prevails also in other countries like UK, Japan etc., but not in Germany (e. g. Lins/Servaes 1999, 2002)

Our contribution

- (1) We study conglomerate premia/discounts using a larger database of German firms and do find a conglomerate discount
- (2) We propose to calculate excess values on an enterprise value basis in order to avoid a so-called „cash distortion“

AGENDA

¶ Motivation and contribution of the paper

¶ Berger/Ofek methodology and cash distortion

¶ Data and research design

¶ Results and implications

BERGER/OFEK METHODOLOGY

- (1) Calculate a firm value-sales multiple for each stand alone firm in a given industry and at a given point in time
- (2) Aggregate all multiples in a given industry to a representative industry multiple using the median
- (3) Compute imputed segment values for all segments of all firms (segment sales * appropriate industry multiple)
- (4) Add imputed segment values for each firm (diversified and stand alone) and get an imputed firm value

$$I(V) = \sum_{i=1}^n AI_i \cdot \left(\text{Ind}_i \left(\frac{V}{AI} \right) \right)$$

- (5) Compare actual firm value and imputed firm value to get the excess value of a firm at a given point in time

$$EX(V) = \ln \left(\frac{V}{I(V)} \right)$$

(cf. Berger/Ofek 1995, pp. 60-63)

$FV_{j,k}$: Firm Value Firm j in Industry k (Stand Alone)
 $C_{j,k}$: Cash, Securities Firm j in Industry k (Stand Alone)
 $EV_{j,k} = FV_{j,k} - C_{j,k}$: Enterprise Value Firm j in Industry k (Stand Alone)
 $R_{j,k}$: Revenues Firm j in Industry k (Stand Alone)

1. Relation between firm specific multiples

$$M_{j,k}^{FV} = \frac{FV_{j,k}}{R_{j,k}}$$

$$M_{j,k}^{EV} = \frac{FV_{j,k} - C_{j,k}}{R_{j,k}} = \frac{FV_{j,k}}{R_{j,k}} - \frac{C_{j,k}}{R_{j,k}} = M_{j,k}^{FV} - \frac{C_{j,k}}{R_{j,k}}$$

2. Relation between industry multiples (mean)

$$M_k^{FV, \otimes} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{FV_{j,k}}{R_{j,k}}$$

$$M_k^{EV, \otimes} = M_k^{FV, \otimes} - \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left[\frac{C_{j,k}}{R_{j,k}} \right] = M_k^{FV, \otimes} - CR_k^{\otimes}$$

3. Relation between imputed values

$$IFV_j^C = R_j^C \sum_{k=1}^K \alpha_{j,k} \cdot M_k^{FV, \otimes}$$

$$IEV_j^C = IFV_j^C - IC_j^C \quad \text{mit} \quad IC_j^C = R_j^C \sum_{k=1}^K \alpha_{j,k} \cdot CR_k^{\otimes}$$

4. Relation between excess values

$$FVEXC_j^C = \ln \left[\frac{FV_j^C}{IFV_j^C} \right] = \ln FV_j^C - \ln IFV_j^C$$

$$EVEXC_j^C = \ln [FV_j^C - C_j^C] - \ln [IFV_j^C - IC_j^C]$$

or in absolute terms:

$$FV - IFV = EV - IEV + (C - IC)$$

Four different excess values depending on aggregation and definition of industry multiples

	Firm Value/Sales	Enterprise Value/Sales
Industry Median Multiple	Berger/Ofek excess value (standard in literature)	Not discussed
Industry Mean Multiple	Not used because of sensitivity to outliers	Not discussed (maybe due to outlier sensitivity)

AGENDA

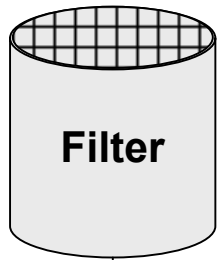
- ¶ Motivation and contribution of the paper
- ¶ Berger/Ofek methodology and cash distortion
- ¶ Data and research design
- ¶ Results and implications

Sources

Osiris-Datenbank (Bureau van Dijk), Datastream

Raw data

- 529 German firms from 1990 till 2000
- 2.311 firmyears, 4.627 segment-firmyears



- exclude all firms in the financial sector
- exclude all firms where segment sales do not add up to >95% of total sales
- exclude all firms which cannot be fully duplicated
- exclude outliers (actual value more than 400% or less than 25% of imputed value)

Resulting sample: 1048 firm years of which 203 are diversified

	No. of Seg.	Capex-to-Sales	Op.Profit-to-Sales	Log of Assets	Cash-to-Sales	Market-to-Book	Obs
All - Mean	1.259	0.108	0.052	12.363	0.121	1.488	10
All - Median	1.000	0.071	0.048	12.173	0.045	1.209	10
Diversified - Mean	2.335	0.099	0.036	12.816	0.076	1.345	2
Diversified - Median	2.000	0.083	0.045	12.414	0.041	1.127	2
Standalone - Mean	1.000	0.110	0.056	12.255	0.132	1.523	8
Standalone - Median	1.000	0.068	0.048	12.081	0.045	1.233	8

AGENDA

- ¶ Motivation and contribution of the paper
- ¶ Berger/Ofek methodology and cash distortion
- ¶ Data and research design
- ¶ Results and implications

No significant discount if excess values are measured on firm value basis

Cash-to-sales ratio has a positive influence on excess value

REGRESSIONS ON FIRM VALUE BASIS

Dependent Variable: Excess Value (FV-Basis with Median-Multiples)

Variable	Coefficient	t-Statistic	Prob.
Constant	-0.282	-2.964	0.003
Diversification Dummy	-0.055	-1.623	0.105
Capex-to-Sales Ratio	0.324	3.826	0.000
Profit-to-Sales Ratio	-0.037	-0.466	0.641
Log of Total Assets	0.019	2.760	0.006
R-squared	0.035		
Adjusted R-squared	0.022		
Number of observations	1052		

Dependent Variable: Excess Value (FV-Basis with Median-Multiples)

Variable	Coefficient	t-Statistic	Prob.
Constant	-0.294	-3.093	0.003
Diversification Dummy	-0.049	-1.466	0.144
Cash-to-Sales Ratio	0.124	2.860	0.004
Capex-to-Sales Ratio	0.302	3.653	0.000
Profit-to-Sales Ratio	-0.097	-1.082	0.281
Log of Total Assets	0.019	2.766	0.006
R-squared	0.048		
Adjusted R-squared	0.035		
Number of observations	1052		

- no significant discount on firm value basis
(supporting Lins/Servaes 1999)

- Germany as a „special case“?

- cash-to-sales ratio has a positive impact on
excess value

- is there a relation between cash holdings and
excess values?

DESCRIPTIVE STATISTICS

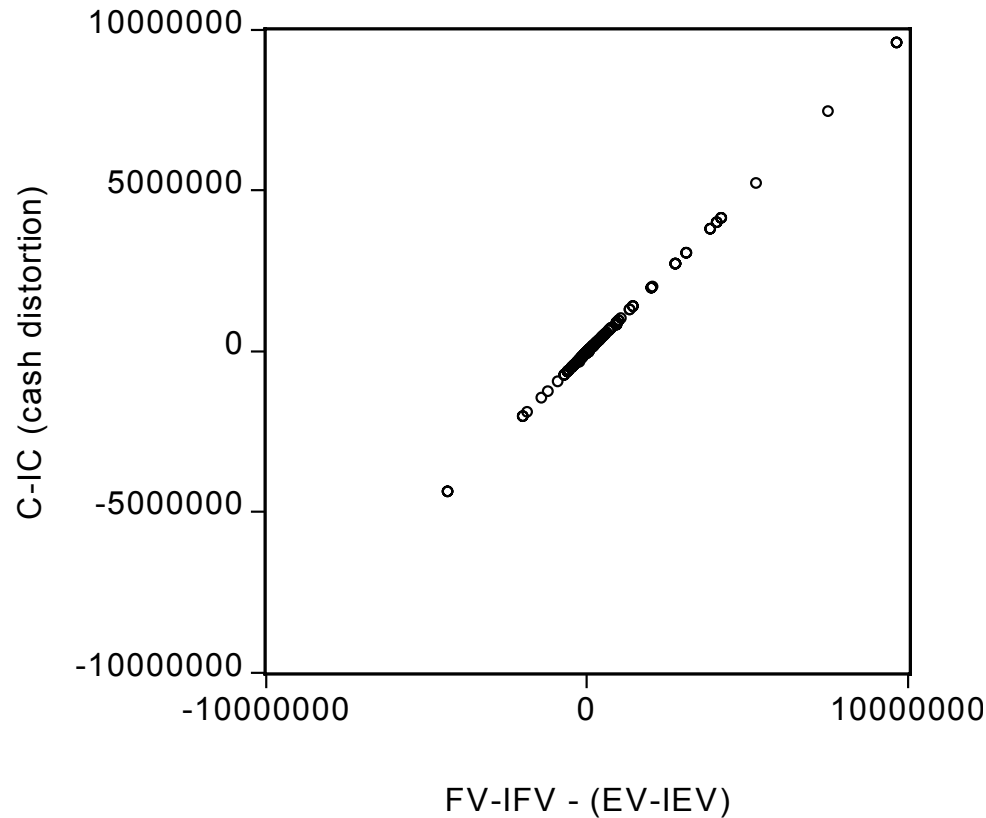
Absolute excess values using the mean as the aggregation metric (in thousand €)

	FV - IFV	EV - IEV	C - IC	Obs.
Average absolute difference (only conglomerates)	-153,622.98	-243,186.68	89,563.70	123

- the average cash distortion for conglomerates is positive
- excess values on firm value basis (FV-IFV) are on average higher than excess values on enterprise value basis (EV-IEV)
- conglomerate discount on firm value basis is therefore underestimated!

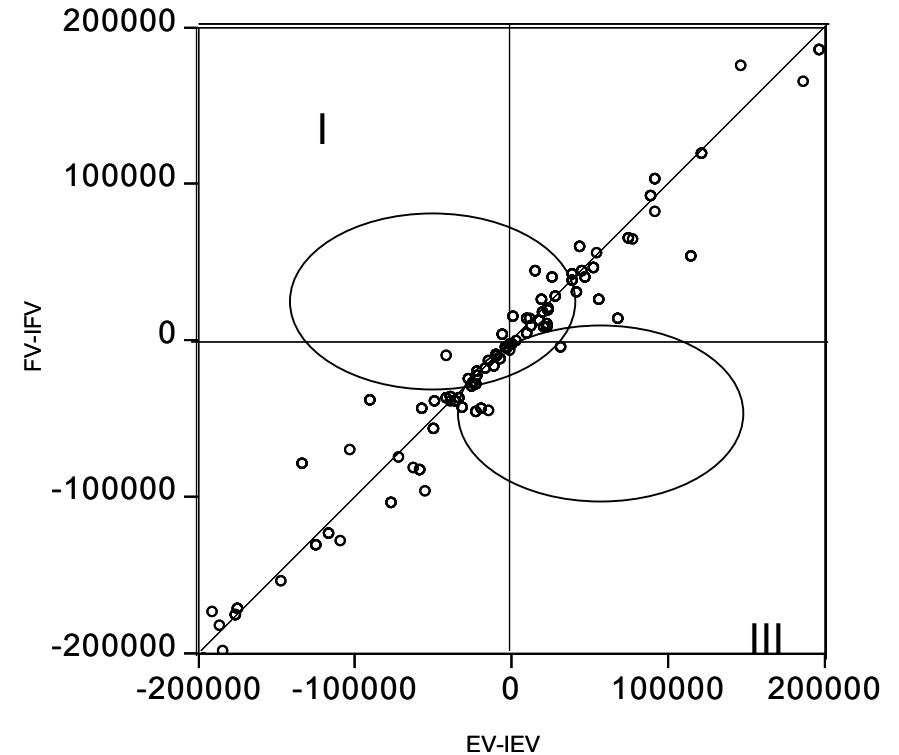
GRAPHICAL REPRESENTATION

Graph 1: Cash distortion and excess value difference



The cash distortion indeed equals the difference between absolute excess value on firm value and enterprise value basis as suggested by theory

Graph 2: Influence of cash distortion on excess values



In quadrants I and III, excess values measured on firm value and enterprise value basis give ambiguous signals!

Significant discount if excess values are measured on enterprise value basis

REGRESSIONS ON ENTERPRISE VALUE BASIS

Dependent Variable: Excess Value (EV-Basis with Median-Multiples)

Variable	Coefficient	t-Statistic	Prob.
Constant	-0.176	-1.767	0.078
Diversification Dummy	-0.064	-1.823	0.069
Capex-to-Sales Ratio	0.351	4.334	0.000
Profit-to-Sales Ratio	-0.064	-0.863	0.388
Log of Total Assets	0.012	1.630	0.103
R-squared	0.033		
Adjusted R-squared	0.020		
Number of observations	1049		



- significant discount on enterprise value basis

Dependent Variable: Excess Value (EV-Basis with Median-Multiples)

Variable	Coefficient	t-Statistic	Prob.
Constant	-0.181	-1.812	0.07
Diversification Dummy	-0.061	-1.759	0.07
Cash-to-Sales Ratio	0.052	2.711	0.00
Capex-to-Sales Ratio	0.343	4.287	0.00
Profit-to-Sales Ratio	-0.090	-1.214	0.22
Log of Total Assets	0.012	1.625	0.10
R-squared	0.035		
Adjusted R-squared	0.021		
Number of observations	1049		



- cash-to-sales ratio still with positive but lower impact on excess value

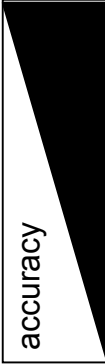
- conglomerate discount prevails

BACKUP-Slides

Coding scheme

- SIC (Standard Industrial Classifications)
- 4-digit Codes to classify business segments

Example.: SIC-Code 3825

	<u>Category</u>	<u>Description</u>
	Division D	Manufacturing
	Major Group (2-digit): 38	Measuring, Analyzing, and Controlling Instruments; Medical and Optical Goods; Watches and Clocks
	Industry Group (3-digit): 382	Laboratory Apparatus and Analytical, Optical
	Industry (4-digit): 3825	Instruments for Measuring and Testing of Electricity and Electrical

Disperstion of SICs

- 4-digit: in total 309 different ones (over all years)
- 2-digit: in total 65 different (over all years)