

Willkommen zum Workshop 2002 “DCF-Verfahren” in Hannover

Das Thema Unternehmensbewertung und DCF-Verfahren wird nicht nur bei Wirtschaftsprüfern und Steuerberatern, sondern auch von Finanzwirten derzeit sehr intensiv diskutiert. In einem Workshop in Berlin im Februar 1998 haben wir ein erstes Treffen der an diesen Themen interessierten Akademiker veranstaltet, um ein Netzwerk “DCF-Verfahren” zu installieren. In diesem Sinne treffen wir uns zum nunmehr zweiten Male in Hannover zu einem regen Gedankenaustausch. Der Tradition von Workshops folgend sollen auch Vorträge zu Konzepten gehalten werden, die gegebenenfalls noch nicht fertig ausgereift sind. Unter Umständen kontroverse Diskussionen zwischen den Teilnehmern sind ebenso wichtig wie die Vorträge selbst.

Die Vorbereitung eines Workshops erfordert das Engagement von Personen und Institutionen, die den Teilnehmern zumeist verborgen bleiben. Wir danken an dieser Stelle dem *Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Hannover* für die Bereitstellung der Räumlichkeiten und dem *Verein zur Förderung der Zusammenarbeit von Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V.* für eine äußerst großzügige finanzielle Unterstützung. Durch die Hilfe des Vereins war es uns beispielsweise möglich, einer Vielzahl von Doktoranden Reisekosten- und Übernachtungsgeld zu zahlen, um ihnen die Teilnahme am Workshop zu ermöglichen. Ohne die tatkräftige Hilfe von Frauke Daidone, Dorothee Bott und Lutz Buchholz und die Unterstützung von Herrn Professor Sonning Bredemeier wäre dieser Workshop nicht gelungen.

Ich wünsche allen Teilnehmern interessante Gespräche und Anregungen für ihre Forschungsvorhaben beziehungsweise ihre praktische Arbeit sowie einen angenehmen Aufenthalt in Hannover.

Hannover, im Juni 2002

Andreas Löffler



Teilnehmerverzeichnis

	Name	Vorname	Universität	e-mail Adresse
	Bakry	Sascha	Wien	sascha_bakry@yahoo.com
Dr.	Behringer	Angelika	Hagen	
	Betzer	Andre	Bonn	andre_betzer@yahoo.de
	Blecher	Christian	Bielefeld	cblecher@wiwi.uni-bielefeld.de
	Bolik	Andreas	Hannover	bolik@mbox.vwl.uni-hannover.de
	Braun	Inga	Magdeburg	inga.braun@wirtschafts-w.uni-magdeburg.de
	Carlsen	Christina	Hamburg	Carlsen@econ.uni-hamburg.de
Dr.	Casey	Christopher	Wien	christopher.casey@wu.edu
	Crasselt	Nils	Bochum	crasselt@iur.ruhr-uni-bochum.de
	Daske	Stefan	Berlin	daske@wiwi.hu-berlin.de
	Dauner	Ulrich	Hohenheim	dauner@uni-hohenheim.de
	Dinstuhl	Volkmar	Bochum	Volkmar.dinstuhl@ruhr-uni-bochum.de
	Dreyer	Dirk	Bamberg	Dirk.Dreyer@sowi.uni-bamberg.de
Prof. Dr.	Eilenberger	Guido	Rostock	Bank@wiwi.uni-rostock.de
	Groh	Alexander	Darmstadt	groh@bwl.tu-darmstadt.de
Prof. Dr.	Hecker	Renate	Tübingen	renate.hecker@uni-tuebingen.de
Dr.	Husmann	Sven	Berlin	husmann@zedat.fu-berlin.de
	Kronimus	André	Vallendar	kronimus@whu.edu
Prof. Dr.	Kruschwitz	Lutz	Berlin	ls-kruschwitz@wiwiss.fu-berlin.de
Prof. Dr.	Kürsten	Wolfgang	Jena	wolfgang.kuersten@wiwi.uni-jena.de
Dr.	Laitenberger	Jörg	Hannover	jl@wacc.de
	Lobe	Sebastian	Regensburg	sebastian.lobe@wiwi.uni-regensburg.de
	Lodowicks	Arnd	Berlin	arnd.lodowicks@wiwiss.fu-berlin.de
Prof. Dr.	Löffler	Andreas	Hannover	al@wacc.de
Prof. Dr.	Mandl	Gerwald	Graz	gerwald.mandl@kfunigraz.ac.at
	Nathusius	Eva	München	Eva.Nathusius@ef.wi.tu-muenchen.de
	Obermaier	Robert	Regensburg	robert.obermaier@wiwi.uni-regensburg.de
Dr.	Rabel	Klaus	Graz	
	Rausch	Benjamin	Frankfurt	brausch@wiw.uni-frankfurt.de
	Richard	Marc	Bochum	richard@iur.ruhr-uni-bochum.de
Prof. Dr.	Richter	Frank	Witten	Frank.Richter@gs.com
Prof. Dr.	Rudolf	Markus	Vallendar	mrudolf@whu.edu
	Schlösser	Rico	Osnabrück	rschloes@nts6.oec.uni-osnabrueck.de
	Scholze	Andreas	Bielefeld	ascholze@wiwi.uni-bielefeld.de
	Schöntag	Jürgen	Regensburg	Juergen.Schoentag@gmx.de
Dr.	Schüler	Andreas	Regensburg	Andreas.Schueler@wiwi.uni-regensburg.de
	Schulte	Inka	Hannover	is@wacc.de
Prof. Dr.	Schwetzler	Bernhard	Leipzig	schwetzl@finance.hhl.de
Prof. Dr.	Siegel	Thoeodor	Berlin	siegel@wiwi.hu-berlin.de
	Sörensen	Daniel	Stuttgart	Daniel.Sorensen@po.Uni-Stuttgart.de
	Tang	Yangiong	Hannover	tangyanqiong@yahoo.de
	Timmreck	Christian	Witten	Christian.Timmreck@uni-wh.de
	Tschöpel	Andreas	Hannover	tschoepel@ubwp.uni-hannover.de
Dr.	Vincenti	Aurelio	Hagen	aurelio.vincenti@fernuni-hagen.de
Dr.	Wallmeier	Martin	Augsburg	martin.wallmeier@wiwi.uni-augsburg.de
Prof. Dr.	Wielenberg	Stefan	Bielefeld	swielenberg@wiwi.uni-bielefeld.de
	Wiese	Jörg	München	Wiese@bwl.uni-muenchen.de
	Wirth	Jörn	Hannover	wirth@ubwp.uni-hannover.de

Zeitplan des Workshop

9.45–10.15 Wolfgang Kürsten (Jena): Einige Anmerkungen zur Theorie der Sicherheitsäquivalentmethode in der Unternehmensbewertung

10.15–10.45 Jörg Wiese (München): Überprüfbarkeit individueller Risikozuschläge

10.45–11.15 Lutz Kruschwitz/Andreas Löffler (Bernover): Semi-subjektive Unternehmensbewertung

11.15–11.30 kurze Pause

11.30–12.00 Bernhard Schwetzler (Leipzig): Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen

12.00–12.30 Christopher Casey (Wien): Unternehmensbewertung mit Hilfe der DCF-Methode - eine weitere Anmerkung zum Zirkularitätsproblem

12.30–13.30 Mittag

13.30–14.00 Frank Richter (Witten-Herdecke): Wert vs. Preis: Zum Einsatz Performancekontrollierter Multiples

14.00–14.30 Andreas Schüler (Regensburg): Do German companies earn their cost of capital considering tax shields on debt and provisions?

15.00–15.15 Kaffeepause

15.15–15.45 Martin Wallmeier (Augsburg): Implikationen von Aktienkursen und Gewinnprognosen von Finanzanalysten für die Eigenkapitalkosten deutscher Unternehmen.

15.45–16.15 Jörg Laitenberger (Hannover): Capital Budgeting with Arbitrage Free Markets and Constant Cost of Capital

16.15–16.45 Andreas Löffler (Hannover): Die Miles-Ezzell-Gleichung erzeugt Arbitrage

Die Vorträge

Wolfgang Kürsten diskutiert die theoretischen Grundlagen der Sicherheitsäquivalentmethode. Er verweist insbesondere auf ein fehlendes theoretisches Fundament zur Anwendung dieser Methode. Er kann zeigen, dass im Fall einer von Neumann-Morgenstern Axiomatisierung nur die lineare Nutzenfunktion die Nutzung der Sicherheitsäquivalentmethode erlaubt – dies führt aber die Methode selbst ad absurdum. Seine Arbeit ist in ZfBF 54 (2002), S. 128-144, erschienen.

Jörg Wiese zeigt, dass das Ergebnis Kürstens auf einer unzulässigen Gleichsetzung von Zinssatz und Zeitpräferenz fußt. Trennt man beide Aspekte, so ergibt sich zum einen, dass man mit der Sicherheitsäquivalentmethode auch im Falle nichtlinearer Nutzenfunktionen theoriegeleitet vorgehen kann, und zum anderen, dass in Kürstens Kalkül der Zinssatz unerlaubter Weise vernachlässigt wird. Weiterhin wird der Vorwurf Kürstens widerlegt, die in der Unternehmensbewertungsliteratur geführte Diskussion über Zusammenhänge zwischen Risikoauflösung und stochastischen Eigenschaften von Überschussprozessen sei von Beliebigkeit geprägt. Schließlich wird der Ansatz Richters zur pragmatischen Ableitung von Risikozuschlägen an dem selbstgesetzten Anspruch gespiegelt, die Vorteile des Konzepts von Ballwieser auf sich zu vereinen und dessen Schwachpunkte zu vermeiden.

Die gemeinsame Arbeit von **Lutz Kruschwitz und Andreas Löffler** versucht, eine Definition eines Sicherheitsäquivalentes in einem mehrperiodigen Kontext anzugeben. Beide Autoren nennen ihren Zugang semi-subjektiv, weil er Elemente des objektiven Zuganges (Existenz eines Kapitalmarktes) wie auch des subjektiven Zuganges (Existenz einer Nutzenfunktion) vereint. Sie betrachten den Fall, in dem nur ein risikoloser Titel am Markt gehandelt wird und zeigen, dass für den Fall risikoloser Cashflows des Unternehmens die Ergebnisse der klassischen Kapitalmarkttheorie repliziert werden. Im unsicheren Fall können sie für CARA-Nutzenfunktionen des Bewerter zeigen, dass die von Schwetzler kürzlich diskutierte Sicherheitsäquivalentmethode tatsächlich zum richtigen Ergebnis führt. Dies ist jedoch schon dann nicht mehr der Fall, wenn der Bewerter Nutzenfunktionen vom CRRA-Typ besitzt.

Bernhard Schwetzler untersucht die Bewertung von Unternehmen mit Pensionsrückstellungen. Er unterscheidet zwischen Ausschüttungs- und Verdrängungsmodell. Durch Verwendung eines zweistufigen APV-Modells erweisen sich beide als Spezialfälle eines von Schwetzler vorgestellten allgemeinen Bewertungsansatzes. Sodann geht Schwetzler auf die Auswirkung von Lohnverdrängungsquoten ein.

Christopher Casey diskutiert die Anwendung eines Roll Back-Verfahrens zur Lösung des Zirkularitätsproblems. Er unterstellt eine autonome Finanzierung und verdeutlicht, dass der WACC-Ansatz durch ein System von T inhomogenen linearen Gleichungen beschrieben werden kann.

Frank Richter stellt in einer gemeinsamen Arbeit mit **Volker Herrmann** einen Ansatz für die Bewertung von Wertpapieren mittels Multiples vor. Die theoretische Begründung für den Einsatz der multiples wird anhand eines Binomialmodells gegeben, aus dem key performance Indikatoren ("kpi") hergeleitet werden. Anhand eines samples von amerikanischen und europäischen Unternehmen werden empirische Untersuchungen durchgeführt die zeigen, dass eine Auswahl vergleichbarer Assets mittels kpi (insbesondere erwartete Wachstumsraten und Renditen) wesentlich bessere Ergebnisse aufweisen als eine Auswahl basierend auf den SIC Industriekodes.

Andreas Schüler untersucht in seinem Vortrag anhand einer empirischen Analyse die

Auswirkungen der Fremdfinanzierung auf den Unternehmenswert. Schüler weist nach, dass die Höhe des tax shields ganz wesentlich von der Halteperiode abhängig ist. Tax shields tragen in der Tat zum Unternehmenswert bei, wobei der Einfluss der Fremdfinanzierung keinesfalls vernachlässigbar ist. Schüler kann dies insbesondere durch den Wechsel des Besteuerungsverfahrens bei der Körperschaftsteuer in Deutschland nachweisen.

Martin Wallmeier untersucht in einer empirischen Analyse Implikationen von Aktienkursen und Gewinnprognosen von Finanzanalysten für die Eigenkapitalkosten deutscher Unternehmen. Er nutzt dazu das Residualgewinnmodell und eine Datenbasis des IBES. Gegeben eine Abfolge erwarteter Gewinne schätzt Wallmeier implizite Kapitalkosten.

Jörg Laitenberger und Andreas Löffler stellen die Frage, unter welchen Annahmen in einem arbitragefreien Modell ein Capital Budgeting Ansatz gerechtfertigt ist. Sie zeigen, dass ohne weitere Annahmen praktisch jede Cashflow-Verteilung konstante Kapitalkosten aufweisen kann. Unter der weiteren Einschränkung einer deterministischen Dividendenrendite dagegen ergibt sich eine gehaltvolle stochastische Struktur, die durch die Eigenschaft voneinander unkorrelierter Inkremente inhaltlich beschrieben werden kann.

Andreas Löffler diskutiert im letzten Beitrag die WACC-Gleichung von Miles und Ezzell und zeigt, dass die voraussetzungslose Anwendung dieser Gleichung eine Arbitragegelegenheit erzeugen kann. Er beweist ferner, dass mit Hilfe der bereits in der vorangegangenen Arbeit erwähnten Fundamentalannahme ein Beweis der Miles-Ezzell-Anpassung möglich ist.

Jörg Wiese¹

Die Überprüfbarkeit individualistischer Risikozuschläge
bei der Unternehmensbewertung



2002-01

März 2002

¹ Universität München, Fakultät für Betriebswirtschaft, Seminar für Rechnungswesen und Prüfung.

Die Überprüfbarkeit individualistischer Risikozuschläge bei der Unternehmensbewertung

Abstract

Jüngst hat *Kürsten* behauptet, man dürfe Unternehmenswerte nicht als Barwert von Sicherheitsäquivalenten errechnen, da durch die Diskontierung Zeitpräferenzen des Entscheiders in den Kalkül eingehen würden, die das Bernoulli-Prinzip nicht messen kann. Modelliere man das Bewertungsproblem konsistent mit dem Bernoulli-Prinzip, lasse sich die Sicherheitsäquivalentmethode nur für lineare Nutzenfunktionen theoretisch stützen. Der Beitrag zeigt, daß das Ergebnis *Kürstens* auf einer unzulässigen Gleichsetzung von Zinssatz und Zeitpräferenz fußt. Trennt man beide Aspekte, so ergibt sich zum einen, daß man mit der Sicherheitsäquivalentmethode auch im Falle nichtlinearer Nutzenfunktionen theoriegeleitet vorgehen kann, und zum anderen, daß in *Kürstens* Kalkül der Zinssatz unerlaubter Weise vernachlässigt wird. Weiterhin wird der Vorwurf *Kürstens* widerlegt, die in der Unternehmensbewertungsliteratur geführte Diskussion über Zusammenhänge zwischen Risikoauflösung und stochastischen Eigenschaften von Überschußprozessen sei von Beliebigkeit geprägt. Schließlich wird der Ansatz *Richters* zur pragmatischen Ableitung von Risikozuschlägen an dem selbstgesetzten Anspruch gespiegelt, die Vorteile des Konzepts von *Ballwieser* auf sich zu vereinen und dessen Schwachpunkte zu vermeiden.

1. Problemstellung

Risikozuschläge in der Unternehmensbewertung sind seit Jahr und Tag umstritten. Gegriffene Risikozuschläge versucht man zu überprüfen, indem man auf durch sie implizierte Sicherheitsäquivalente² oder auf das Capital Asset Pricing Model (CAPM) zurückgreift. Im ersten Fall spricht man von individualistischen oder subjektiven, im zweiten von marktmodellgestützten oder objektivierten Risikozuschlägen.³

Die Überprüfung anhand von Sicherheitsäquivalenten ist jüngst von *Kürsten*⁴ vehement kritisiert worden. Er zeigt zum einen, daß ein diskontiertes Sicherheitsäquivalent keine auf der Präferenzebene des Entscheiders gemessene Größe ist, da in der Abzinsung Zeitpräferenzen zum Ausdruck kommen, die von der Axiomatik der Bernoulli-Theorie nicht abgedeckt sind. Erfasse man die zeitverschiedenen Überschußverteilungen konsistent mit der Bernoulli-Theorie in einer Gesamtnutzenfunktion, so lasse sich die Sicherheitsäquivalentmethode nur für lineare Periodennutzenfunktionen theoretisch stützen. Zum anderen versucht er nachzuweisen, daß die in der Unternehmensbewertungsliteratur geführte Diskussion über Zusammenhänge zwischen Risikoauflösung und stochastischen Eigenschaften von Überschußprozessen⁵ von Beliebigkeit geprägt ist.

Dieser Beitrag zeigt, daß die Kritik *Kürstens* an der Sicherheitsäquivalentmethode auf einer unzulässigen Gleichsetzung von Zinssatz und Zeitpräferenz fußt und die Trennung beider Aspekte den Schluß zuläßt, daß man mit der Sicherheitsäquivalentmethode auch im Falle nicht-linearer Periodennutzenfunktionen theoriegeleitet vorgehen kann. Weiterhin wird nachgewiesen, daß der in der Unternehmensbewertungsliteratur verwandte Risikobegriff *generalisierbare* Aussagen über das Verhältnis von Risikoauflösung und stochastischen Eigenschaften der Ertragsverteilungen zuläßt und der Vorwurf der Beliebigkeit nicht gerechtfertigt ist.

Daneben hat sich *Ballwieser*⁶ der Frage gewidmet, wie man Risikozuschläge ohne Kenntnis von Sicherheitsäquivalenten gewinnen kann. Ausgehend von den Vor- und Nachteilen dieses Ansatzes hat *Richter*⁷ jüngst einen alternativen Ansatz erarbeitet, der die Vorzüge des Kon-

² Vgl. *Ballwieser* [Wahl, 1981], S. 101-102.

³ Vgl. *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 132-139; *Schwetzler* [Unsicherheit, 2000], S. 470; *Mandl / Rabel* [Unternehmensbewertung, 1997], S. 384. Vgl. kritisch zu dieser Gegensatzbildung *Ballwieser* [Marktorientierung, 2001], S. 22-24.

⁴ Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002].

⁵ Vgl. *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 328; *Schwetzler* [Unsicherheit, 2000], S. 474-475.

⁶ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 160-161.

⁷ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001].

zepts von *Ballwieser* auf sich vereinen und zugleich dessen Nachteile vermeiden soll. Inwieweit dies gelingt, soll im folgenden überprüft werden.

2. Die Überprüfung gegriffener Risikozuschläge mit Hilfe der Sicherheitsäquivalentmethode und deren Kritik

Um die Unsicherheit künftiger Erträge im Bewertungskalkül zu erfassen, greift der individualistische Ansatz auf die Risikonutzenfunktion des Bewerter zurück.⁸ Hierzu kann man sich grundsätzlich zweier Ansätze bedienen, die zu identischen Ergebnissen führen müssen.⁹ Nach der *Sicherheitsäquivalentmethode* wird die Verteilung der Überschüsse \tilde{X} einer Periode t zunächst über die Umweltzustände auf ihr Sicherheitsäquivalent $S[\tilde{X}_t]$ ¹⁰ verdichtet und anschließend mit dem risikolosen Zinssatz i über die Zeit auf den Bewertungszeitpunkt diskontiert. Im Einperiodenfall ergibt sich der Unternehmenswert E_0 als¹¹

$$E_0 = \frac{S[\tilde{X}_1]}{1+i} \quad (2.1)$$

und im Mehrperiodenfall als

$$E_0 = \sum_{t=1}^n \frac{S[\tilde{X}_t]}{(1+i)^t}. \quad (2.2)$$

Alternativ zur Berücksichtigung der Unsicherheit im Zähler läßt sich diese verarbeiten, indem der Erwartungswert $E[\tilde{X}_t]$ der Überschußverteilung mit dem um einen Risikozuschlag z korrigierten risikolosen Zinssatz diskontiert wird (*Risikozuschlagsmethode*).¹² Dann gilt im Einperiodenfall:

$$E_0 = \frac{E[\tilde{X}_1]}{1+i+z_1}. \quad (2.3)$$

⁸ Vgl. *Moxter* [Grundsätze, 1991], S. 149; *Schwetzer* [Unsicherheit, 2000], S. 469.

⁹ Vgl. *Ballwieser* [Wahl, 1981], S. 101-102; *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 172; *Moxter* [Grundsätze, 1991], S. 157; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 79; *Kruschwitz* [Risikozuschläge, 2001], S. 2409; *Mandl / Rabel* [Unternehmensbewertung, 1997], S. 229.

¹⁰ Vgl. zur Definition des Sicherheitsäquivalents statt aller *Bamberg / Coenenberg* [Entscheidungslehre, 2000], S. 89.

¹¹ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 156; *Schwetzer* [Unsicherheit, 2000], S. 469; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 78.

Will man gewährleisten, daß der Risikozuschlag nicht irgendeinen, sondern einen (entscheidungs)theoretisch fundierbaren Wert annimmt, so bedarf es der Kenntnis des Sicherheitsäquivalents.¹³ Gleichsetzen der Beziehungen (2.1) und (2.3) führt zu

$$z_1 = \left(\frac{E[\tilde{X}_1]}{S[\tilde{X}_1]} - 1 \right) \cdot (1+i). \quad (2.4)$$

Dieses Verfahren zur Ableitung von Risikozuschlägen ist jüngst von *Kürsten* als theoretisch nicht haltbar kritisiert worden. Er argumentiert, das *Bernoulli*-Prinzip gestatte es aufgrund seiner Axiomatik¹⁴ lediglich, unsichere Alternativen, deren Realisationen in genau einem Zeitpunkt eintreten, anhand von deren Erwartungsnutzenwerten entsprechend der *Risikopräferenz* des Entscheiders zu vergleichen. Zusätzlich vorhandene *Zeitpräferenzen* könne die Erwartungsnutzentheorie daher nicht *messen* oder strukturerhaltend abbilden.¹⁵ Ein als Barwert von Sicherheitsäquivalenten ermittelter Unternehmenswert gemäß (2.1) oder (2.2) sei deswegen ohne empirischen Gehalt.¹⁶ Um das *Bernoulli*-Prinzip konsistent auf den bei Unternehmensbewertungen regelmäßig vorliegenden *Mehrperiodenfall* übertragen zu können, müßten intertemporale Aspekte ausgeblendet werden, indem die Überschußverteilungen der Perioden $t = 0, \dots, n$ zu multiattributiven Ergebnisverteilungen der Dimension $n+1$ zusammengefaßt werden. Der Bewerter habe diese Ergebnisverteilungen anhand der in seiner mehrattributiven Nutzenfunktion $U(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ enthaltenen Risikopräferenz zu beurteilen.¹⁷ Als „kanonischer Unternehmenswert“¹⁸ könne derjenige sichere, in $t = 0$ vereinnahmte Betrag E_0 gelten, den der Bewerter den künftigen, riskanten Überschüssen $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ des Unternehmens als äquivalent erachtet:

$$U(E_0, 0, \dots, 0) = E[U(0, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)]. \quad (2.5)$$

¹² Vgl. *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 78; *Ballwieser* [Wahl, 1981], S. 102; *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 157.

¹³ Vgl. *Ballwieser* [Wahl, 1981], S. 102; *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 171; *Mandl / Rabel*, [Unternehmensbewertung, 1997], S. 234; *Schwetzler* [Ende, 2002], S. 149.

¹⁴ Vgl. *Neumann / Morgenstern* [Spieltheorie, 1967], S. 24-29 und S. 642-657. Zu ähnlichen Axiomensystemen vgl. etwa *Schildbach / Sieben* [Entscheidungstheorie, 1990], S. 67-69; *Schneeweiß* [Entscheidungskriterien, 1967], S. 73-77; *Bitz* [Entscheidungstheorie, 1981], S. 180-186.

¹⁵ Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 138.

¹⁶ Dies schließe sinnmachende Aussagen über Präferenzrelationen, etwa in Gestalt von Größenvergleichen zwischen Unternehmenswerten nicht aus. Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 137-138; *Kürsten* [Kardinalität, 1992], S. 466.

¹⁷ Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 138-139. Vgl. zu multiattributiven Nutzenfunktionen auch *Eisenführ / Weber* [Entscheiden, 1993], S. 255-258; *Eisenführ* [Zeitpräferenzen, 1988], S. 133; *Keeney / Raiffa* [Decisions, 1993], S. 219-220; *Dyckhoff* [Kompensation, 1985], S. 198.

¹⁸ *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 139.

Um Beziehung (2.5) auf die Gleichung (2.2) entsprechende Darstellung des Unternehmenswertes als Summe abgezinster periodenbezogener Sicherheitsäquivalente bringen zu können, sei folgende zusätzliche Additivitätsvoraussetzung erforderlich, die eine Zerlegung der multiattributiven Nutzenfunktion in eine mit den Gewichtungsfaktoren α_t gewogene Summe einattributiver Nutzenfunktionen u erlaube:¹⁹

$$U(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) = \sum_{t=0}^n \alpha_t u_t(\tilde{X}_t). \quad (2.6)$$

Diese additive Aufspaltung der mehrattributiven Nutzenfunktion gemäß Gleichung (2.6) gelingt nur, wenn die periodischen Überschußverteilungen die enge Bedingung der additiven Nutzenabhängigkeit erfüllen, wonach der Entscheider beim paarweisen Vergleich von Lotterien allein deren Randverteilungen, nicht jedoch die Verteilung aller Attributkombinationen betrachten darf.²⁰ Überträgt man Beziehung (2.6) auf die Bestimmungsgleichung (2.5) für den Unternehmenswert, so ergibt sich für $\alpha_0 := 1$ und $u_t(0) := 0 \forall t$ über

$$U(E_0, 0, \dots, 0) = u_0(E_0) = \sum_{t=1}^n \alpha_t \cdot E[u_t(\tilde{X}_t)] \quad (2.7)$$

der Unternehmenswert als²¹

$$E_0 = u_0^{-1} \left[\sum_{t=1}^n \alpha_t \cdot E[u_t(\tilde{X}_t)] \right]. \quad (2.8)$$

Will man Gleichung (2.8) in eine der Beziehung (2.2) entsprechende Struktur

$$E_0 = \sum_{t=1}^n u^{-1}(\alpha_t) \cdot S[\tilde{X}_t] \quad (2.9)$$

überleiten, so läßt sich zeigen, daß die Periodennutzenfunktionen in allen Zeitpunkten *identisch* und *linear* sein müssen.²² Die Linearität der Periodennutzenfunktionen charakterisiert

¹⁹ Vgl. Kürsten [Theoriedefizit, 2002], S. 139.

²⁰ Vgl. Fishburn [Independence, 1965], S. 39-41; Keeney. / Raiffa, [Decisions, 1993], S. 229-232; Weber [Entscheidungen, 1983], S. 96; Kürsten [Theoriedefizit, 2002], S. 139-140; Eisenführ [Zeitpräferenzen, 1988], S. 133-134; Eisenführ / Weber [Entscheiden, 1993], S. 262-263.

²¹ Vgl. Kürsten [Theoriedefizit, 2002], S. 140.

²² Vgl. Kürsten [Theoriedefizit, 2002], S. 140-141. Ein hiervon abweichendes Resultat erzielt Hakansson [Modell, 1969], S. 77-83, der von einer additiv oder multiplikativ verknüpften Gesamtnutzenfunktion U ausgeht. Dabei nimmt er an, daß die Skalierungsfaktoren gemäß Bedingung (2.6) $\alpha_t = 1 \forall t$ betragen und die Überschußverteilungen stochastisch voneinander unabhängig sind. Beide Prämissen führen dazu, daß die von Kürsten [Theoriedefizit, 2002], S. 141, genannten Funktionalgleichungen von der Inversen der Periodennutzenfunktion nicht mehr zu erfüllen sind: Da die Skalierungsfaktoren wegfallen, kann man die zweite Funktionalgleichung vergessen. Die erste wird wegen der Additivitätseigenschaft der Sicherheitsäquivalente

einen Entscheider, der *risikoneutral* ist und folglich der Sicherheitsäquivalentmethode nicht bedarf.²³ Dieses Resultat stellt die theoretische Begründbarkeit der Sicherheitsäquivalentmethode (gemäß Gleichung (2.2)) in Frage, die ihrerseits zur Überprüfung gegriffener Risikozuschläge dienen soll.²⁴

Die Kritik *Kürstens* hat ihren Ausgangspunkt in der zutreffenden Feststellung, die Axiomatik des *Bernoulli*-Kriteriums erlaube keine *Messung* von *Zeitpräferenzen*. Es ist indes zu bezweifeln, ob daraus die Folgerung gezogen werden darf, daß ein abgezinster Sicherheitsäquivalent $S(\tilde{X}_t) \cdot (1+i)^{-t}$ ohne empirischen Gehalt sei. Dieser Schluß basiert darauf, daß Zinssatz und Zeitpräferenz (zumindest partiell) gleichgesetzt werden. Fraglich erscheint, ob eine solche Gleichsetzung zulässig ist, oder ob es sich beim *Zins* nicht vielmehr um eine Größe handelt, die das *Entscheidungsfeld vervollständigt*, indem sie die zeitliche Transformation von finanziellen Gütern erlaubt, während es sich bei der *Zeitpräferenz* um einen davon zu trennenden *Bestandteil des Zielplanes* handelt.²⁵ Zu prüfen ist also, ob in der *Möglichkeit*, ein monetäres Sicherheitsäquivalent, das allein anhand von *Risikopräferenzen* und damit im Einklang mit der Axiomatik der *Bernoulli*-Theorie gewonnen wird, zum Kapitalmarktzins über mehrere Perioden anlegen zu können²⁶, eine Zeitpräferenz im Sinne einer unterschiedlichen Schätzung von Gegenwarts- und Zukunftsgütern zum Ausdruck kommt.²⁷

Der Kapitalmarktzins kann etwa als „Produktivzins“ aus der Mehrenergiebigkeit von Produktionswegen begründet werden²⁸ und ist als solcher zu trennen von etwaigen subjektiven, nutzenbasierten Zeitpräferenzen. Letztere werden im Kontext der Unternehmensbewertung aus Gründen der Komplexitätsreduktion üblicherweise vernachlässigt²⁹, so daß dies auch für

$S[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n] = S[\tilde{X}_1] + S[\tilde{X}_2] + \dots + S[\tilde{X}_n]$ im Falle von Nutzenfunktionen mit konstanter lokaler absoluter Risikoaversion und bei stochastisch unabhängigen Überschußverteilungen überflüssig. Vgl. dazu *Bamberg / Spremann* [Implications, 1981], S. 211. In dieser Modellwelt ist mit der exponentiellen Nutzenfunktion eine Nutzenfunktion zulässig, die *Risikoaversion* zum Ausdruck bringt. Gibt man die Prämisse unabhängiger Zahlungsverteilungen auf und betrachtet statt dessen *abhängige*, so lösen – ebenso wie in *Kürstens* Ansatz – auch in *Hakanssons* Modell nur lineare Periodennutzenfunktionen das Problem.

²³ Vgl. *Bamberg / Coenenberg* [Entscheidungslehre, 2000], S. 93-94 und S. 99.

²⁴ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 159; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 79 und S. 261; *Schwetzler* [Ende, 2002], S. 149.

²⁵ Vgl. *Schildbach / Sieben* [Entscheidungstheorie, 1990], S. 103-106.

²⁶ Aggregiert man zeitverschiedene Überschußverteilungen über die Zeit, so ist diese Möglichkeit (nicht aber die Zeitpräferenz) gemeint. Vgl. dazu *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 105-112; *Ballwieser* [Möglichkeiten, 1980], S. 68-70.

²⁷ Vgl. hierzu *Lehmann* [Zeitpräferenz, 1975], S. 81, der den Marktzinssatz explizit von der Zeitpräferenz, definiert als Bewertungsfunktional für den zeitlichen Abstand eines Nutzenbetrages zum Betrachtungszeitpunkt, abhebt.

²⁸ Vgl. *Lehmann* [Zeitpräferenz, 1975], S. 84-86.

²⁹ Vgl. *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 168-169 mit weiteren Nachweisen; *Ballwieser / Leuthier*, [Grundprinzipien, 1986], S. 606-607; *Schwetzler* [Ende, 2002], S. 147-148; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 112.

die Sicherheitsäquivalentmethode gilt. Demgegenüber steht hinter dem Kapitalmarkt- oder „Produktivzins“ die Möglichkeit, finanzielle Mittel anlegen zu können.³⁰

Die Problemstellung, der sich *Kürsten* gewidmet hat, ist in der Begründung einer individuell optimalen Strukturierung von konsumtiv verfügbaren Mitteln im Zeitablauf zu sehen.³¹ Dieses Strukturierungsproblem findet in den nutzenbasierten Skalierungsfaktoren $u^{-1}(\alpha_t)$ Niederschlag und besteht *unabhängig von der Existenz eines positiven Zinssatzes*.³² Verdeutlichen läßt sich dieser Gedanke am *Hirshleifer*-Modell der intertemporalen Konsumplanung auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt.³³ Im Raum zwischen heutigem ($t = 0$) und morgigem ($t = 1$) Einkommen e und Konsum c markieren die Geraden Linien gleichen Barwerts. In ihrer unterschiedlichen Steigung drücken sich unterschiedliche Zinssätze für Geldanlage i_h und Kreditaufnahme i_s aus:

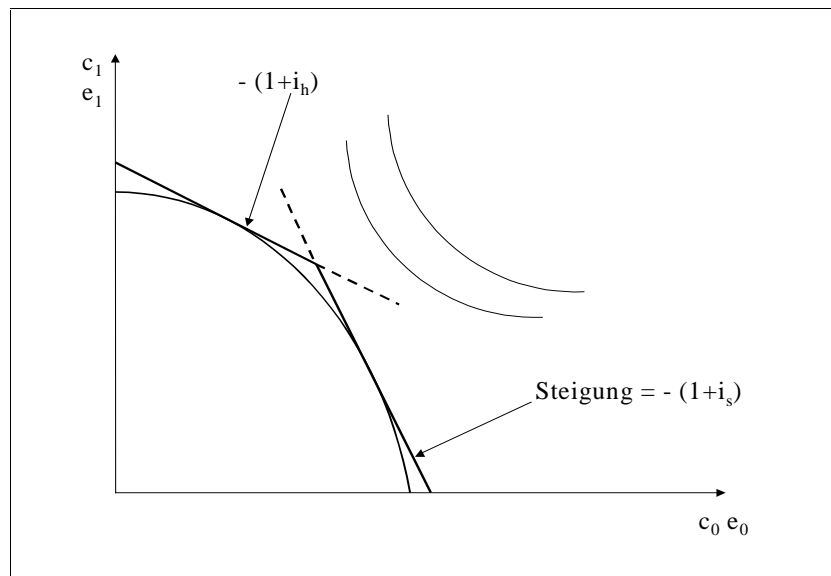


Abbildung 1: Intertemporale Konsumplanung auf unvollkommenem Kapitalmarkt

Während die von den Iso-Barwertgeraden umschlossene Kurve die Realinvestitionsmöglichkeiten ausdrückt, gibt die Schar von Indifferenzkurven das Präferenzsystem des Investors wieder. Die Zeitpräferenz oder Steigung der Indifferenzkurven eines einzelnen Wirtschaftssubjekts wird von den unterschiedlichen Zinssätzen oder Steigungen der Iso-Barwertgeraden nicht beeinflusst. Vielmehr entscheidet der Tangentialpunkt der Indifferenzkurve oder die

³⁰ Vgl. hierzu bereits die grundlegenden Gedanken von *Fisher* [Zinstheorie, 1932], S. 51-52, und darauf aufbauend *Lehmann* [Zeitpräferenz, 1975], S. 86.

³¹ Dieses Problem wird per Annahme anhand von *Risikopräferenzen* zu lösen versucht, um die Axiome der Erwartungsnutzentheorie nicht zu verletzen. Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 139.

³² Aus der Existenz eines positiven Zinssatzes darf nicht zwingend auf die Existenz von Zeitpräferenzen geschlossen werden. Vgl. *Lehmann* [Zeitpräferenz, 1975], S. 101-102.

³³ Vgl. hierzu und im folgenden grundlegend *Hirshleifer* [Decision, 1958], S. 333-337; *Hirshleifer* [Kapitaltheorie, 1974], S. 196-212. Vgl. ferner *Schmidt / Terberger* [Grundzüge, 1997], S. 114-120; *Drukarczyk* [Konsumpräferenz, 1970], S. 47-51; *Schildbach / Sieben* [Entscheidungstheorie, 1990], S. 106-107.

Zeitpräferenz darüber, welcher der beiden Zinssätze der relevante für die Berechnung des Gegenwartswertes ist.³⁴ Diese Tatsache aber läßt nicht auf die Gleichheit von Zinssatz und Zeitpräferenz schließen, sondern auf das Gegenteil: Es handelt sich bei Zinssatz und Zeitpräferenz um zwei *strikt voneinander zu trennende* Phänomene.³⁵

Der Zinssatz fehlt indes in dem von *Kürsten* formulierten Modell.³⁶ Diesem Modell zufolge soll der kritisierten Sicherheitsäquivalentmethode ein Unternehmenswert als Vorbild dienen, der sich als mehrattributives Sicherheitsäquivalent³⁷ interpretieren läßt:

$$E_0 = U^{-1} \left\{ E \left[U \left(0, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n \right) \right] \right\} := S \left(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n \right). \quad (2.10)$$

Der Entscheider hat demzufolge zwischen einem sicheren, im Bewertungszeitpunkt zu ver-einnahmenden Betrag und einer Folge von unsicheren Überschußverteilungen zu wählen. Eine solche Situation wird der im Rahmen der Unternehmensbewertung gestellten Frage nicht gerecht. Der Bewerter sieht im Unternehmenswert nicht eine sichere Größe in $t = 0$ verkörpert, sondern jenen (sicheren) Betrag, mit dessen Hilfe er *bei bestmöglicher alternativer Anlage* einen dem riskanten Entnahmestrom entsprechenden Nutzen erzielen kann.³⁸ Wenn die *bestmögliche* Alternativanlage aus Gründen der Typisierung³⁹ dem landesüblichen Zinssatz zum Opfer fällt, so verbleibt immerhin eine Alternativanlage zum Kapitalmarktzinssatz, die jedoch in der von *Kürsten* postulierten Unternehmenswertkonzeption überhaupt nicht auftaucht. Damit sind die Beziehungen (2.2) und (2.10) *nicht miteinander vergleichbar*. Insbesondere dürfen die Gewichtungsfaktoren $u^{-1}(\alpha_i)$ nicht den Diskontierungsfaktoren $(1+i)^{-t}$ gegenübergestellt werden, weil sich hinter ihnen – wie oben gesehen – völlig verschiedene Sachverhalte verbergen. Sachlich gesehen werden die Möglichkeiten des Investors nicht erfaßt, den beim Verkauf (Kauf) eines Unternehmens freiwerdenden (verausgabten) Betrag erneut alternativ

³⁴ Vgl. *Hirshleifer* [Decision, 1958], S. 337, der dort “discount rate” und “time-preference” explizit von einander abhebt. Vgl. auch *Hirshleifer* [Kapitaltheorie, 1974], S. 198; *Franke / Hax* [Finanzwirtschaft, 2000], S. 160-161; *Schmidt / Terberger* [Grundzüge, 1997], S. 124.

³⁵ Auch bei vollkommenem Kapitalmarkt ist diese Trennung vorhanden: Die Stärke der Krümmung der Indifferenzkurven drückt die Zeitpräferenz aus, indem sie angibt, wie der Investor seine Konsummöglichkeiten zwischen den Zeitpunkten verteilt sehen möchte. Vgl. *Lehmann* [Zeitpräferenz, 1975], S. 113-125; *Schmidt / Terberger* [Grundzüge, 1997], S. 103. Daß die Indifferenzkurven die durch den Einheitszinssatz determinierte Gerade nur dann tangieren, wenn die Steigung der Geraden gleich der durch die Indifferenzkurven determinierte Grenzrate der Substitution ist und es so gesehen nur eine einzige Lösung für das Konsumplanungsproblem gibt, bedeutet nicht, daß Zins und Zeitpräferenz identisch sind: Verschiedene Investoren werden trotz des Einheitszinses und der durch ihn „aufgezwungenen“ einzigen möglichen präferenzunabhängigen Lösung verschieden gekrümmte Indifferenzkurven (oder Zeitpräferenzen) aufweisen.

³⁶ Er wird auch nicht dadurch berücksichtigt, daß die mehrattributive Nutzenfunktion additiv zerlegt wird.

³⁷ Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 139.

³⁸ Vgl. *Moxter* [Grundsätze, 1991], S. 10-12.

³⁹ Vgl. *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 170-171; *Ballwieser / Leuthier* [Grundprinzipien, 1986], S. 607-608; *Schwetzler* [Ende, 2002], S. 147.

anzulegen (nicht mehr alternativ anlegen zu können).⁴⁰ Diese Möglichkeiten gehen aber über den Zinssatz in das Grenzpreiskalkül des Bewerter ein. Es ist daher fraglich, inwieweit sich aus einem alternativenunspezifischen Modell präskriptive Aussagen über Anwendungsbedingungen für die Sicherheitsäquivalentmethode (gemäß Beziehung (2.2)) ableiten lassen, die einen Alternativenvergleich einschließt.

Der Vorwurf, ein diskontiertes Sicherheitsäquivalent sei inkompatibel mit der Erwartungsnutzentheorie, weil in der Abzinsung Zeitpräferenzen zum Ausdruck kämen, ist somit nicht gerechtfertigt. Ermittelt man den Unternehmenswert nach Gleichung (2.2), so steht man nicht im Widerspruch zur Erwartungsnutzentheorie; man muß jedoch in Kauf nehmen, daß die resultierende Summe von Sicherheitsäquivalenten nur zufällig zum gleichen Ergebnis führt wie der mehrattributive Ansatz. Will man den Unternehmenswert indes auf dem Wege einer additiven Zerlegung einer übergeordneten mehrattributiven Nutzenfunktionen gewinnen, so handelt man sich (zwangsläufig) die von *Kürsten* erarbeiteten Einschränkungen der additiven Nutzenabhängigkeit⁴¹ sowie der Linearität der Periodennutzenfunktionen ein.

Da es sich bei der Bewertung von Unternehmen um ein Problem mit konkretem Anwendungsbezug handelt⁴², ist der Ansatz *Kürstens* auch auf seine Anwendbarkeit zu untersuchen. Hier erscheint es selbst bei Identität von Entscheider und Berater kaum vorstellbar, daß eine mehrattributive Nutzenfunktion über die Menge sämtlicher Alternativen ermittelbar ist.⁴³ Man steht insofern vor einem zyklischen Problem, als diese Nutzenfunktion vorliegen muß, da ansonsten offen bleiben muß, ob die Skalierungsfaktoren α_i „korrekt“ bemessen sind.⁴⁴ Liegt die mehrattributive Nutzenfunktion indes vor, so bedarf es deren Dekomposition nicht mehr. Die genannten Einschränkungen hinsichtlich der Gestalt der (periodischen) Nutzenfunktionen sind in diesem Fall nur dann von Belang, wenn sie die Präferenzen des Bewerter ohnehin zutreffend abbilden.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob es bessere Möglichkeiten als die Sicherheitsäquivalentmethode gibt, um gegriffene Risikozuschläge zu plausibilisieren.⁴⁵ Hierbei handelt es sich nicht

⁴⁰ Vgl. *Moxter* [Grundsätze, 1991], S. 9-13; *Ballwieser* [Marktorientierung, 2001], S. 19-20; *Schmidt / Terberger* [Grundzüge, 1997], S. 121-122.

⁴¹ Dieses Resultat ist seit *Fishburn* [Independence, 1965] bekannt.

⁴² Vgl. *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 1.

⁴³ Vgl. *Eisenführ / Weber* [Entscheiden, 1993], S. 269-270; *Laux* [Grundlagen, 1991], S. 88-89 und S. 97.

⁴⁴ Vgl. zu einer ähnlichen Überlegung *Lehmann* [Zeitpräferenz, 1975], S. 155. Vgl. zu Methoden und Problemen der Ermittlung von Gewichtungsfaktoren *Eisenführ / Weber* [Entscheiden, 1993], S. 263-267; *Laux* [Grundlagen, 1991], S. 94-97; *Weber* [Entscheidungen, 1983], S. 106-113; *Keeney / Raiffa* [Decisions, 1993], S. 267-269 und S. 278-280.

⁴⁵ Vgl. *Schwetzer* [Ende, 2002], S. 147-148 und S. 156.

um die Frage, ob der Bewerter den „Modell- und Schätzaufwand neoklassisch-objektivistischer Ertragswertverfahren akzeptieren möchte“.⁴⁶ Vielmehr gilt es, die *Vertretbarkeit getroffener Annahmen* im individualistischen und marktmodellgestützten Ansatz gegeneinander abzuwägen. So basiert das CAPM etwa auf der Prämisse eines vollkommenen Kapitalmarktes, unterstellt homogene Erwartungen aller Marktteilnehmer und bildet die Preisbildung von Wertpapieren im Gleichgewicht ab.⁴⁷ Es ist bekannt, daß Kapitalmärkte unvollkommen sind, die Erwartungen unterschiedlicher Investoren voneinander abweichen, in gleichgewichtigen Situationen kein Anlaß zum Handel mit Unternehmen besteht und Preise einzelner Wertpapiere im Kontext der Unternehmensbewertung solange eine untergeordnete Rolle spielen, als Paketzuschläge beobachtbar sind.⁴⁸ Derartige Einschränkungen lassen sich auch durch beliebigen „Modell- und Schätzaufwand“ nicht beseitigen. Ungeachtet dessen wird das CAPM herangezogen, um risikoangepaßte Kalkulationszinsfüße zu gewinnen. Ob man nun geneigt ist, dessen Annahmen als zutreffendes Abbild der Realität aufzufassen, oder ob man die Einschränkungen des individualistischen Ansatzes in Kauf nehmen will, ist eher eine Frage des Geschmacks als der theoretischen „Richtigkeit“.⁴⁹

Will man weiterhin gewährleisten, daß die nach dem $\mu - \sigma$ -Prinzip urteilenden Entscheider des marktmodellgestützten Ansatzes nach dem axiomatisch besser verankerten *Bernoulli-Prinzip*⁵⁰ urteilen, so bedarf es normalverteilter Rückflüsse, quadratischer Nutzenfunktionen⁵¹ oder linearer Risikoklassen.⁵² Die Normalverteilungshypothese ist mit Blick auf Unternehmenserträge mit der Problematik behaftet, daß sie keineswegs Allgemeingültigkeit für sich beanspruchen kann⁵³, ja sogar falsch ist.⁵⁴ Weiterhin ist bekannt, daß die quadratische Nutzenfunktion nur im aufsteigenden Ast der Parabel sinnvoll verwendbar ist, da für Ergebnisgrößen

⁴⁶ Kürsten [Theoriedefizit, 2002], S. 143. In die gleiche Richtung argumentiert auch Schwetzler [Ende, 2002], S. 148.

⁴⁷ Vgl. zum Beispiel Perridon / Steiner [Finanzwirtschaft, 1997], S. 260.

⁴⁸ Vgl. Ballwieser [Marktorientierung, 2001], S. 23; Ballwieser [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 174-175; Ballwieser [Verfahren, 1998], S. 83; Franke / Hax [Finanzwirtschaft, 2000], S. 348.

⁴⁹ Auch die in diesem Zusammenhang gerne konstruierte Dichotomie zwischen „objektiver“ Marktbewertung und „subjektivem“ Individualkalkül erweist sich als vordergründig, wenn man bedenkt, daß hinter der Objektivierung nur eine Aggregation subjektiver Erwartungen steht, deren Ergebnis es wiederum (nicht ohne Subjektivismen) auf das zu bewertende Unternehmen zu übertragen gilt. Vgl. dazu Ballwieser [Marktorientierung, 2001], S. 23.

⁵⁰ Die Befolgung des *Bernoulli-Kriteriums* kann als Ausdruck rationalen Handelns angesehen werden. Vgl. Schneeweiß [Entscheidungskriterien, 1967], S. 89; Diedrich [Konzeptionen, 1996], S. 627-633.

⁵¹ Vgl. Kürsten [Grundlagen, 1997], S. 80; Schneeweiß [Entscheidungskriterien, 1967], S. 96-98; Kruschwitz [Finanzierung, 1995], S. 144-148 und S. 188; Bamberg / Coenenberg [Entscheidungslehre, 2000], S. 107-109; Bamberg / Spremann [Implications, 1981], S. 216; Franke / Hax [Finanzwirtschaft, 2000], S. 299-300; Laux [Grundlagen, 1991], S. 210; Laux [CAPM, 1998], S. 2.

⁵² Vgl. Schneeweiß [Entscheidungskriterien, 1967], S. 121-127; Löffler [Paradox, 2001], S. 47-51.

⁵³ Vgl. Schäfer [Unternehmensinvestitionen, 1999], S. 252.

jenseits des Maximums die Monotoniebedingung von Nutzenfunktionen verletzt wird.⁵⁵ Handelt es sich – wie im Falle der Unternehmensbewertung – bei den Lotterien um *Überschuß*-verteilungen, so ist dies nicht plausibel.⁵⁶ Daneben impliziert die quadratische Nutzenfunktion die wenig einzusehende Konsequenz einer mit dem Vermögen steigenden Risikoprämie bzw. einer zunehmenden lokalen absoluten Risikoaversion.⁵⁷ Über lineare Risikoklassen wird Kompatibilität zwischen beiden Entscheidungsprinzipien nur im Falle einer *einzigsten* riskanten Anlagemöglichkeit und für bestimmte $\mu - \sigma$ -Kombinationen erreicht.⁵⁸

Da es daneben im Kontext der Unternehmensbewertung nur in Spezialfällen problemangemessen ist, mit Risikokorrekturfaktoren aus dem einperiodigen CAPM zu arbeiten⁵⁹, ist auf ein *dynamisches* Kapitalmarktmodell zurückzugreifen. Auch in dieser Welt wird die Additivitätsvoraussetzung gemäß Gleichung (2.6) üblicherweise vorausgesetzt⁶⁰, so daß auch hier lediglich Präferenzen zulässig sind, welche der Bedingung der additiven Nutzenabhängigkeit gehorchen.

Die Kernfrage, inwieweit sich ein übergeordnetes Entscheidungs- und Bewertungsproblem unter vertretbaren Prämissen in eine Folge operationaler Einzelprobleme separieren läßt, beantworten damit auch Kapitalmarktmodelle nicht in befriedigender Weise.

⁵⁴ Die Normalverteilung ist auf dem Intervall $[-\infty; +\infty]$ definiert, was die widersinnige Möglichkeit unbegrenzter Erträge und unbeschränkter Haftung systematisch mit einschließt. Vgl. dazu auch *Löffler* [Paradox, 2001], S. 47.

⁵⁵ Vgl. *Schneeweiß* [Entscheidungskriterien, 1967], S. 98; *Kruschwitz* [Finanzierung, 1995], S.146; *Franke / Hax* [Finanzwirtschaft, 2000], S. 300-301; *Bitz* [Entscheidungstheorie, 1981], S. 195.

⁵⁶ Vgl. *Schneeweiß* [Entscheidungskriterien, 1967], S. 98; *Franke / Hax* [Finanzwirtschaft, 2000], S. 301-302; *Laux* [Grundlagen, 1991], S. 211; *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 166; *Löffler* [Paradox, 2001], S. 44.

⁵⁷ Vgl. *Franke / Hax* [Finanzwirtschaft, 2000], S. 301-302; *Kruschwitz* [Finanzierung, 1995], S. 139 und S. 147; *Eisenführ / Weber* [Entscheiden, 1993], S. 212-213; *Bitz* [Entscheidungstheorie, 1981], S.199.

⁵⁸ Vgl. *Löffler* [Paradox, 2001], S. 49-51, der an dieser Stelle dafür plädiert, das $\mu - \sigma$ -Modell nicht dem *Bernoulli*-Prinzip unterzuordnen, sondern beide Ansätze als verschiedene Möglichkeiten der Risikomodellierung zu begreifen.

⁵⁹ Vgl. *Fama* [Uncertainty, 1977], S. 3; *Hachmeister* [Diskontierung, 1998], S. 30-31; *Fischer / Hahnenstein / Heitzer* [Ansätze, 1999], S. 1212; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 365-367; *Wilhelm* [Finanztitelmärkte, 1983], S. 18.

⁶⁰ Vgl. *Wilhelm* [Finanztitelmärkte, 1983], S. 62; *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 139.

3. Der Zusammenhang zwischen Risikomaß, Risikoauflösung und stochastischen Eigenschaften von Überschußverteilungen

3.1 Die Kritik Kürstens

Der in der Unternehmensbewertungsliteratur⁶¹ diskutierte Zusammenhang zwischen *Risikoauflösung* im Zeitablauf⁶² und *stochastischer Abhängigkeit* oder *Unabhängigkeit* von Überschußverteilungen wurde von *Kürsten* als „risikothoretische Leerformel“⁶³ bezeichnet. Ob sich das in einem Zustandsbaum enthaltene Risiko allmählich oder schlagartig auflöse, habe nichts mit (Un-)Abhängigkeitseigenschaften von Zahlungsprozessen zu tun. Definiere man Risiko, wie in der entscheidungstheoretischen Literatur üblich, „als Möglichkeit verschiedener Ergebnisausprägungen infolge verschiedener Umweltzustände“⁶⁴, so löse sich das Risiko bezüglich einer periodischen Überschußverteilung \tilde{X}_t stets erst *nach* deren Realisation (*ex post*) auf. Diese Feststellung ist so trivial wie richtig, besagt aber nichts über den Zusammenhang zwischen Risikoauflösung und (Un-)Abhängigkeitseigenschaften, wie er sich *ex ante*, aus der (einzig interessierenden) Sicht des Bewertungszeitpunktes, darstellt.

Kürsten widmet sich auch der *ex ante*-Betrachtung und knüpft den Begriff der Risikoauflösung daran, ob und wie sich die unter dem Informationsstand I_t der Vorgängerperioden $\hat{t} = 0, 1, \dots, t-1$ bedingte Varianz $\text{Var}(\tilde{X}_t | I_t)$ einer Überschußverteilung im Zeitablauf vermindert.⁶⁵ Anhand des folgenden Binomialprozesses wird gezeigt, daß sich das mit diesem Maß quantifizierte Risiko im Fall *abhängiger* Zahlungen nicht – wie in der Literatur zur Unternehmensbewertung vorhergesagt⁶⁶ – über die Perioden bis t allmählich verringern muß, sondern sich im Gegenteil zwischenzeitlich erhöhen kann: Bezogen auf den in Abbildung 1

⁶¹ Vgl. *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 328 und S. 332; *Schwetzler* [Unsicherheit, 2000], S. 474-482; *Schwetzler* [Wachstum, 2000], S. 6.

⁶² Der Begriff „resolution of uncertainty“ geht zurück auf *Robichek / Myers* [Problems, 1966], S. 729. Vgl. hierzu auch *Robichek* [Risk, 1969], S. 517.

⁶³ *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 132.

⁶⁴ *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 134 mit weiteren Nachweisen.

⁶⁵ Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 134-135.

⁶⁶ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 158; *Schwetzler* [Unsicherheit, 2000], S. 473; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 328.

dargestellten Prozeß errechnet *Kürsten* zunächst die Varianz der vier Ausprägungen umfassenden Überschußverteilung \tilde{X}_2 unter dem Informationsstand in $t = 0$, $\text{Var}(\tilde{X}_2 | I_0)$.⁶⁷

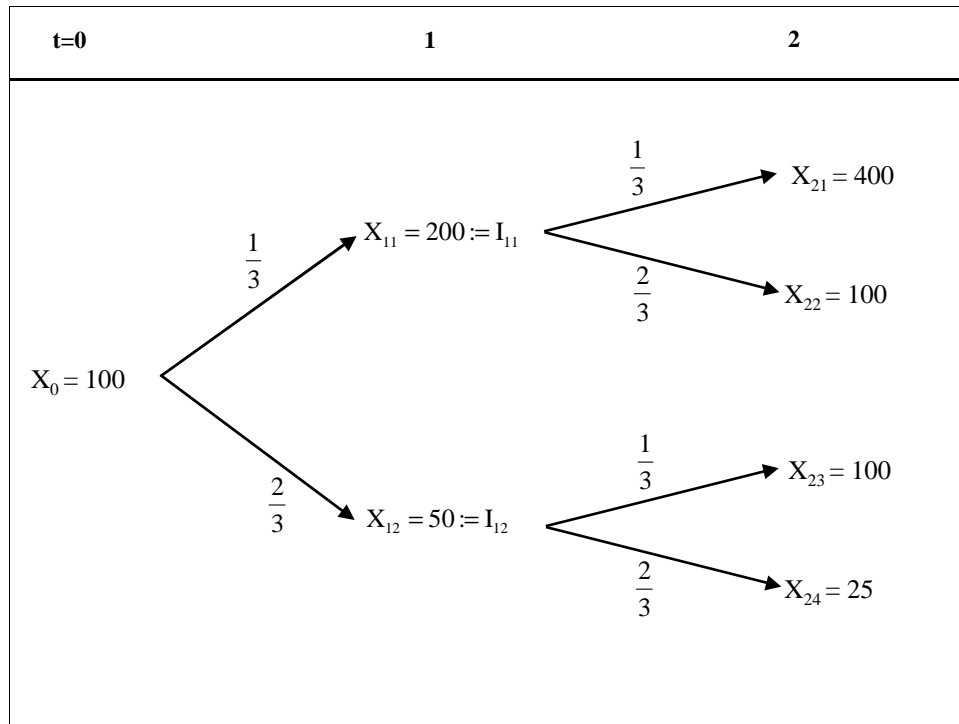


Abbildung 2: Zustandsbaum bei stochastisch abhängigen Überschußverteilungen

Anschließend wandert er gedanklich vom Zeitpunkt $t = 0$ auf $t = 1$ und beobachtet, welche der zwei möglichen Ausprägungen X_{11} oder X_{12} sich aus der Verteilung \tilde{X}_1 realisiert. Ausgehend von dieser Ziehung in $t = 1$ sind in $t = 2$ nurmehr zwei Realisationen in jeder der bedingten Verteilungen \tilde{X}_{21} und \tilde{X}_{22} möglich. Auf Grundlage dieses Informationsstandes bestimmt er die Varianzen der bedingten Verteilungen $\text{Var}(\tilde{X}_{21} | I_{11})$ sowie $\text{Var}(\tilde{X}_{22} | I_{12})$ und stellt sie $\text{Var}(\tilde{X}_2 | I_0)$ gegenüber. Dabei wird ersichtlich, daß sich die Varianzen unter dem Informationsstand in $t = 1$ gegenüber der Varianz unter I_0 zum einen *erhöhen* können und sich das so verstandene Risiko zum anderen *ungleichmäßig auflösen* kann.⁶⁸

Von einer allmählichen Auflösung des Risikos über den Planungszeitraum im Falle abhängiger Zahlungen dürfe daher keine Rede sein.⁶⁹ Überhaupt hätten sich die Vertreter der Unternehmensbewertungslehre bislang nicht auf einen bestimmten *Risikobegriff* verständigt, folg-

⁶⁷ Die Wachstumsfaktoren betragen 2 für die Aufwärts- und 0,5 für die Abwärtsbewegung. Die Sprungwahrscheinlichkeiten sind in Abbildung 1 an den Kanten abzulesen. Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 134-135.

⁶⁸ Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 134-135.

⁶⁹ Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 135.

lich sei auch unklar, was unter Risikoauflösung zu verstehen sei.⁷⁰ Es sei im folgenden der Versuch unternommen, das Gegenteil nachzuweisen.

3.2 Der Fall abhängiger Überschußverteilungen

Die Unternehmensbewertungslehre versteht unter Risiko – übereinstimmend mit der entscheidungstheoretischen Literatur – die Mehrwertigkeit von Ertragserwartungen.⁷¹ Im individualistischen Ansatz bedarf es der Nutzenfunktion des (potentiellen) Eigners, um die mehrwertigen Ausprägungen einer Lotterie auf ihr Sicherheitsäquivalent als stellvertretenden, monetären Wert zu verdichten.⁷² Wird der Erwartungswert einer Verteilung ihrem Sicherheitsäquivalent gegenübergestellt, so läßt sich Risiko quantifizieren als eine im Falle risikoaverser Entscheider positive Risikoprämie $RP[\tilde{X}_t]$:⁷³

$$RP[\tilde{X}_t] = E[\tilde{X}_t] - S[\tilde{X}_t]. \quad (3.1)$$

Aus dieser Perspektive ist unter Risikoauflösung die *erwartete Verminderung der Risikoprämie im Zeitablauf* zu verstehen. Bezogen auf das obige Beispiel *abhängiger* Zahlungsverteilungen betrachtet man zunächst die *unbedingte* Verteilung \tilde{X}_2 und errechnet aus deren Sicherheitsäquivalent und Erwartungswert die Risikoprämie entsprechend Gleichung (3.1):⁷⁴

$$RP[\tilde{X}_2] = E[\tilde{X}_2] - S[\tilde{X}_2] = 100 - 62,99 = 37,00. \quad (3.2)$$

In welchem Ausmaß löst sich nun dieses Risiko auf? Um diese Frage zu beantworten, sind die Risikoprämien der *bedingten* Verteilungen \tilde{X}_{21} und \tilde{X}_{22} zu bestimmen

$$\begin{aligned} RP[\tilde{X}_{21}] &:= RP_{21} = 200 - 158,74 = 41,26 \\ RP[\tilde{X}_{22}] &:= RP_{22} = 50 - 39,69 = 10,31 \end{aligned} \quad (3.3)$$

⁷⁰ Vgl. Kürsten [Theoriedefizit, 2002], S. 133.

⁷¹ Vgl. Moxter [Grundsätze, 1991], S. 117; Ballwieser [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 156-157. Vgl. in diesem Sinne weiterhin Ballwieser [Wahl, 1981], S. 101; Drukarczyk [Unternehmensbewertung, 2001], S. 71; Mandl / Rabel [Unternehmensbewertung, 1997], S. 212-213.

⁷² Vgl. Eisenführ / Weber [Entscheiden, 1993], S. 211; Ballwieser [Möglichkeiten, 1980], S. 67.

⁷³ Vgl. Keeney / Raiffa [Decisions, 1993], S. 151; Bamberg / Coenenberg [Entscheidungslehre, 2000], S. 96-97; Eisenführ / Weber [Entscheiden, 1993], S. 211; Kruschwitz [Risikozuschläge, 2001], S. 2410; Drukarczyk [Unternehmensbewertung, 2001], S. 77; Siepe [Kapitalisierungszinssatz, 1998], S. 326. Genau genommen handelt es sich bei der Risikoprämie um ein Maß für die Risikoeinstellung des Bewerter.

⁷⁴ Der risikolose Zinssatz betrage Null. Als zustands- und zeitunabhängige Nutzenfunktion wird hier die Logarithmus naturalis-Funktion verwandt: $u(\tilde{X}_t) := \ln(\tilde{X}_t)$. Die Gültigkeit der weiteren Ausführungen läßt sich indes auch für *konkave* Nutzenfunktionen anderer (etwa quadratischer) Gestalt zeigen.

und auf ihren Erwartungswert zu verdichten:

$$E[RP_{21}, RP_{22}] = \frac{1}{3} \cdot 41,26 + \frac{2}{3} \cdot 10,31 = 20,63. \quad (3.4)$$

Die Differenz zwischen der Risikoprämie der unbedingten Verteilung und dem Erwartungswert der Risikoprämien der bedingten Verteilungen charakterisiert die Risikoauflösung bei Fortschreiten der Zeit um eine Periode:

$$RP[\tilde{X}_2] - E[RP_{21}, RP_{22}] = 16,37 > 0. \quad (3.5)$$

Die Differenz ist im Falle *abhängiger* Zahlungsverteilungen positiv.⁷⁵ Sie besagt, daß der Bewerter – im Sinne einer Erwartungswertbildung *aus Sicht des Bewertungszeitpunktes* – erwarten darf, daß sich der vorzunehmende Risikoabschlag nach Ablauf der Periode zwischen $t=0$ und $t=1$ in den dann vorzufindenden bedingten Verteilungen um den Differenzbetrag vermindert. Es kommt zu einer allmählichen Risikoauflösung im Zeitlauf. Dahinter steht der Abbau einer Risikokomponente, die in der Art eines intertemporalen Kovarianzterms die Beziehungen zwischen den Realisationen der unterschiedlichen Perioden widerspiegelt.⁷⁶ Während diese Risikokomponente in $RP[\tilde{X}_2]$ enthalten ist, fällt sie bei isolierter Betrachtung von RP_{21} sowie RP_{22} und damit auch in $E[RP_{21}, RP_{22}]$ weg.

Aus *Sicht des Bewertungszeitpunktes* handelt es sich beim erwarteten Risikoabschlag gemäß Beziehung (3.4) um ein zu erwartendes *Restrisiko* in Höhe von $37,00 - 16,37 = 20,63$, das sich in $t=2$ auflöst. Verwendet man im Rahmen der rekursiven Bewertung risikoangepaßte Zinsfüße z_{21} und z_{22} , um die in den bedingten Verteilungen \tilde{X}_{21} und \tilde{X}_{22} enthaltene Unsicherheit zu berücksichtigen, so müssen diese bewirken, daß dieses Restrisiko im Kalkül verarbeitet wird.⁷⁷ Blickt man hingegen *von der letzten Periode* in Richtung Bewertungszeit-

⁷⁵ Dieses Ergebnis läßt für den Fall abhängiger Zahlungsverteilungen generalisieren, wie im Anhang gezeigt wird.

⁷⁶ Vgl. dazu Köth [Differenzierungsmöglichkeiten, 1979], S. 38-39.

⁷⁷ Entsprechend der Bestimmungsgleichung (2.4) ergibt sich $z_{21} = z_{22} = 0,2599$. (Die Identität der Risikozuschläge resultiert aus der Struktur des gewählten Beispiels und ist für die weiteren Ausführungen nicht zwingend vorauszusetzen.) Die abgezinnten bedingten Erwartungswerte ergeben sich als $E[\tilde{X}_{21}] \cdot (1 + 0,2599)^{-1} = 158,74$ und $E[\tilde{X}_{22}] \cdot (1 + 0,2599)^{-1} = 39,69$. Reduziert man beide Werte auf ihren Erwartungswert und stellt sie ihrem Sicherheitsäquivalent gegenüber, so folgt für die Verarbeitung des Risikos: $37,00 - [1/3 \cdot 158,74 + 2/3 \cdot 39,69 - u^{-1} (1/3 \cdot \ln(158,74) + 2/3 \cdot \ln(39,69))] = 20,63$. Daß dem Cash Flow-Prozeß – *unabhängig* von der in den bedingten Verteilungen herrschenden *Risikohöhe* – eine bestimmte Form der Risikoauflösung einfach durch „gedankliche Erhebung“ von Risikozuschlägen zugewiesen wird, wie von Kürsten [Theoriedefizit, 2002], S. 133, behauptet, ist damit abwegig.

punkt, so handelt es sich bei der Differenz $RP[\tilde{X}_2] - E[RP_{21}, RP_{22}] = 16,37$ um ein „*Restrisiko*“, das durch Ansatz eines weiteren risikoangepaßten Zinsfußes z_1 zu erfassen ist.

Diese Überlegungen machen deutlich, daß eine isolierte Risikoerfassung in den einzelnen Zeitpunkten des Planungszeitraums im Falle stochastisch abhängiger Überschußverteilungen nicht möglich ist.⁷⁸ Zur Kennzeichnung des Begriffs der Risikoauflösung dürfen bedingte Risikomaße – etwa zustandsabhängige Varianzen – allein aus der *Perspektive des Bewertungszeitpunktes* $t = 0$ beurteilt werden, nachdem sie einer *Erwartungswertbildung* unterzogen worden sind.

3.3 Der Fall unabhängiger Überschußverteilungen

Aus dem gewählten Beispiel geht auch hervor, daß sich die Verminderung der Unsicherheit nicht *gleichmäßig* vollzieht. Der Begriff der *gleichmäßigen* Risikoauflösung ist von *Kürsten* jüngst im Kontext abhängiger Überschußverteilungen kritisiert worden.⁷⁹ In der von ihm unterstellten Allgemeinheit ist dieser Begriff in der Literatur indes nie diskutiert worden. Dort findet er sich entweder im Zusammenhang mit stochastisch abhängigen Verteilungen mit *gleichem Erwartungswert* und der *Varianz der unbedingten Verteilung*, wo er zutreffend ist⁸⁰, oder im Kontext unabhängiger Verteilungen.

Im Fall *unabhängiger* Überschußverteilungen nimmt die in Gleichung (3.5) zum Ausdruck kommende Risikokomponente den Wert Null an.⁸¹ Ein intertemporales Kovarianzrisiko besteht nicht. Für den Zeitpunkt $t = 1$ ist folglich keine Risikoauflösung zu erwarten. Nimmt man – mit Blick auf obiges Beispiel – an, daß die bedingten Verteilungen \tilde{X}_{21} und \tilde{X}_{22} jeweils die gleiche Gestalt $\left(400, \frac{1}{5}, 75, \frac{4}{5}\right)$ annehmen, so gilt:

$$RP[\tilde{X}_2] - E[RP_{21}, RP_{22}] = 35,18 - \left(\frac{1}{3} \cdot 35,18 + \frac{2}{3} \cdot 35,18\right) = 0. \quad (3.6)$$

⁷⁸ Vgl. *Köth* [Differenzierungsmöglichkeiten, 1979], S. 38-39.

⁷⁹ Vgl. *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 134.

⁸⁰ Vgl. *Schwetzer* [Unsicherheit, 2000], S. 475; *Schwetzer* [Ende, 2002], S. 153-154.

⁸¹ Vgl. *Köth* [Differenzierungsmöglichkeiten, 1979], S. 40-41. Auch dieses Ergebnis läßt sich für den Fall unabhängiger Überschußverteilungen generalisieren. Ein formaler Beweis findet sich im Anhang.

Es kommt erst in $t = 2$ zu einer schlagartigen Risikofreisetzung.⁸² Dieses Risiko wird – beispielsweise – durch einmalige Anwendung eines Risikozuschlags in Höhe von $z_2 = 0,3356$ gemäß Gleichung (2.4) verarbeitet.

Von einer gleichmäßigen Risikoauflösung⁸³ kann im Kontext *unabhängiger* Verteilungen⁸⁴ mit Blick auf die Bewertungsgleichung

$$E_0 = \sum_{t=1}^n \frac{E[\tilde{X}_t]}{(1+i+z'_t)^t} \quad (3.7)$$

gesprochen werden, aus der sich durch Gleichsetzen mit Beziehung (2.2) und unter zusätzlicher Gültigkeit von⁸⁵

$$\frac{S[\tilde{X}_t]}{(1+i)^t} = \frac{E[\tilde{X}_t]}{(1+i+z'_t)^t} \quad \forall t \quad (3.8)$$

der Risikozuschlag

$$z'_t = (1+i) \left[\left(\frac{E[\tilde{X}_t]}{S[\tilde{X}_t]} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 \right] \quad (3.9)$$

ableiten läßt.⁸⁶ Die in (3.6) errechnete Risikoprämie $RP[\tilde{X}_2]$ in Höhe von 35,18 wird nun nicht durch *einmaligen* Ansatz eines Risikozuschlags in Höhe von $z_2 = 0,3356$ berücksichtigt, sondern durch *t-maligen* Ansatz des Risikozuschlags z'_t über die Perioden $t' = 1, 2, \dots, t$, wobei hier für $t = 2$ gilt: $(1+z'_2)^2 = (1+0,1557)^2 = (1+0,3356) = (1+z_2)$. Die wiederholte Anwendung von z'_2 führt somit zum *gleichen Ergebnis* wie die einmalige Anwendung von z_2 .⁸⁷ Eine gleichmäßige Risikoauflösung über die Zeit findet damit nicht tatsächlich statt,

⁸² Dieselbe Beobachtung macht übrigens *Kürsten* [Theoriedefizit, 2002], S. 135, auf Basis der von ihm herangezogenen bedingten Varianzen.

⁸³ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 158.

⁸⁴ Vgl. *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 330; *Ballwieser / Leuthier* [Grundprinzipien, 1986], S. 610.

⁸⁵ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 157; *Ballwieser / Leuthier* [Grundprinzipien, 1986], S. 609.

⁸⁶ Vgl. *Ballwieser / Leuthier* [Grundprinzipien, 1986], S. 609-610; *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 157-158; *Ballwieser* [Kalkulationszinsfuß, 1997], S. 2393; *Ballwieser* [Unternehmensbewertung, 2001], Sp. 2087-2088; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 330.

⁸⁷ Augenscheinlich vernachlässigt *Kruschwitz* [Risikozuschläge, 2001], S. 2412, Nebenbedingung (3.8), da er ansonsten kaum Anlaß gehabt hätte, diese mit Blick auf das Ergebnis gegebene Methodenäquivalenz zwischen Gleichung (2.4) und der Beziehung (3.7) in Verbindung mit (3.9) anzuzweifeln. Beachtet man Nebenbedingung (3.8), so ist es natürlich gleichgültig, ob und wie man die darin zum Ausdruck kommende Risikoprämie über die Perioden $t' = 1, 2, \dots, t$ verteilt. Vgl. dazu auch *Schwetzler* [Risiko, 2002], S. 390-391, und

sondern wird dem Cash Flow-Prozeß in Gestalt periodenweise gleich hoher Zuschläge zugeschrieben.⁸⁸

4. Pragmatische Risikozuschläge nach *Ballwieser* und *Richter*

Den bisher diskutierten Bestimmungsgleichungen von z ist gemeinsam, daß sie das Sicherheitsäquivalent der Überschußverteilung enthalten. Ist das Sicherheitsäquivalent jedoch bekannt, so bedarf es der Risikozuschlagsmethode nicht mehr.⁸⁹ Umgekehrt steht der Bewerter vor dem Problem, daß die Kenntnis von Sicherheitsäquivalenten nicht in jedem Falle vorausgesetzt werden kann, da die dahinterstehende individuelle Risikonutzenfunktion oftmals nicht gegeben ist und der Risikozuschlagsmethode damit die theoretische Grundlage fehlt.⁹⁰

Um die Ermittlung von Sicherheitsäquivalenten zu umgehen und Ermessensspielräume bei der Bemessung der Risikozuschläge zu begrenzen, können daher *pragmatische Normen* zur Gewinnung von Risikozuschlägen nützlich sein.⁹¹ Ein solcher Vorschlag wurde von *Ballwieser* erarbeitet.⁹² Kennt der Bewerter zwar nicht das Sicherheitsäquivalent, jedoch die Mindestentnahme $M[\tilde{X}_t]$ der Überschußverteilung, so kann er ohne Rückgriff auf Sicherheitsäquivalente einen pragmatischen Risikozuschlag z^{prag} als⁹³

$$z_t^{\text{prag}} = \left(\frac{E[\tilde{X}_t] - M[\tilde{X}_t]}{E[\tilde{X}_t]} \right) \cdot (1+i) \quad (4.1)$$

bestimmen. Positive Eigenschaften dieses Ansatzes sind darin zu sehen, daß der Risikozuschlag mit steigendem (sinkendem) Risiko – gemessen an der Differenz zwischen $E[\tilde{X}_t]$ und $M[\tilde{X}_t]$ – zunimmt (abnimmt) und bei Sicherheit ($E[\tilde{X}_t] = M[\tilde{X}_t]$) den Wert Null an-

Wilhelm [Risikoprämien, 2002], S. 3-5 und S. 11, der die Fruchtlosigkeit der Diskussion über Gleichung (3.9) in der Unternehmensbewertungsliteratur anprangert, und offensichtlich außer Acht läßt, daß additive Risikozuschläge ein Phänomen der Bewertungspraxis sind, in welchem die besagte Diskussion erst ihren Ausgangspunkt findet.

⁸⁸ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 158; *Schwetzer* [Risiko, 2002], S. 391.

⁸⁹ Vgl. *Ballwieser* [Wahl, 1981], S. 102; *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 171; *Mandl / Rabel* [Unternehmensbewertung, 1997], S. 234.

⁹⁰ Vgl. *Ballwieser* [Wahl, 1981], S. 102-103; *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 171.

⁹¹ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 1.

⁹² Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 160.

⁹³ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 161; *Ballwieser* [Unternehmensbewertung, 2001], Sp. 2088; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 341; *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 3.

nimmt.⁹⁴ Darüber hinaus überschreitet z^{prag} nie den logisch begründbaren Grenzwert für Risikozuschläge.⁹⁵ Diesen Vorteilen werden einige Nachteile entgegengehalten: Erstens erscheinen die pragmatischen Risikozuschläge im Vergleich zur Bandbreite der Überschußverteilung relativ hoch.⁹⁶ Zweitens wird moniert, die pragmatischen Risikozuschläge verstießen gegen das Prinzip der Wertadditivität⁹⁷ und somit gegen die Aussagen des marktorientierten Ansatzes zur Bestimmung von Risikozuschlägen.⁹⁸ Drittens wurde das Konzept bislang lediglich bei intertemporal stochastisch unabhängigen Überschußverteilungen angewandt, was als unrealistisch empfunden werden kann.⁹⁹

Ausgehend von diesen Kritikpunkten hat *Richter* jüngst ein weiteres pragmatisches Konzept erarbeitet, das die positiven Eigenschaften von z^{prag} aufweist, dessen Schwachpunkte jedoch vermeiden soll.¹⁰⁰ Daß *Ballwiesers* Ansatz auf den Fall abhängiger Zahlungsverteilungen übertragbar ist, wird deutlich, wenn man im Rahmen der rekursiven Bewertung je Zustand j auf einen *zustandsabhängigen*, zu Beziehung (4.1) strukturidentischen Zuschlag zurückgreift:¹⁰¹

$$z_{tj}^{\text{prag}} = \left(\frac{E[\tilde{X}_{tj}] - M[\tilde{X}_{tj}]}{E[\tilde{X}_{tj}]} \right) \cdot (1+i) \quad (4.2)$$

Richter ging der Frage nach, unter welchen Bedingungen trotz stochastisch abhängiger Überschußverteilungen mit Blick auf die einzelnen Zeitpunkt mit *zustandsunabhängigen* Risikozuschlägen gerechnet werden kann. Er erreicht dies, indem er den allgemeinen Ansatz in zweierlei Hinsicht einschränkt: Zum einen folgen die Zahlungen annahmegemäß einem Binomialprozeß. Zum anderen ist der Wachstumsprozeß dergestalt spezifiziert, daß die jeweilige Zahlung entweder um den Faktor $(1+u_t)$ steigt oder um dessen Kehrwert $1/(1+u_t)$ fällt.¹⁰²

Bezeichnet p die intertemporal konstante Wahrscheinlichkeit für einen Anstieg und $(1-p)$ diejenige für ein Absinken der Überschüsse¹⁰³, so stellt sich der Binomialprozeß wie folgt dar:

⁹⁴ Vgl. *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 160; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 341; *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 3-4.

⁹⁵ Vgl. zur Plausibilitätsprüfung von „gegriffenen“ Risikozuschlägen *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 172-173; *Ballwieser* [Methoden, 1993], S. 160-161; *Mandl / Rabel* [Unternehmensbewertung, 1997], S. 229-231.

⁹⁶ Vgl. *Ballwieser* [Unternehmensbewertung, 2001], Sp. 2088; *Drukarczyk* [Unternehmensbewertung, 2001], S. 342; *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 5.

⁹⁷ Vgl. zum Prinzip der Wertadditivität etwa *Franke / Hax* [Finanzwirtschaft, 2000], S. 324-336.

⁹⁸ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 2.

⁹⁹ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 2; *Schwetzler* [Unsicherheit, 2000], S. 783-485.

¹⁰⁰ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 2.

¹⁰¹ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 6.

¹⁰² Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 6-7; *Richter* [Rules, 2001], S. 179.

¹⁰³ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 7.

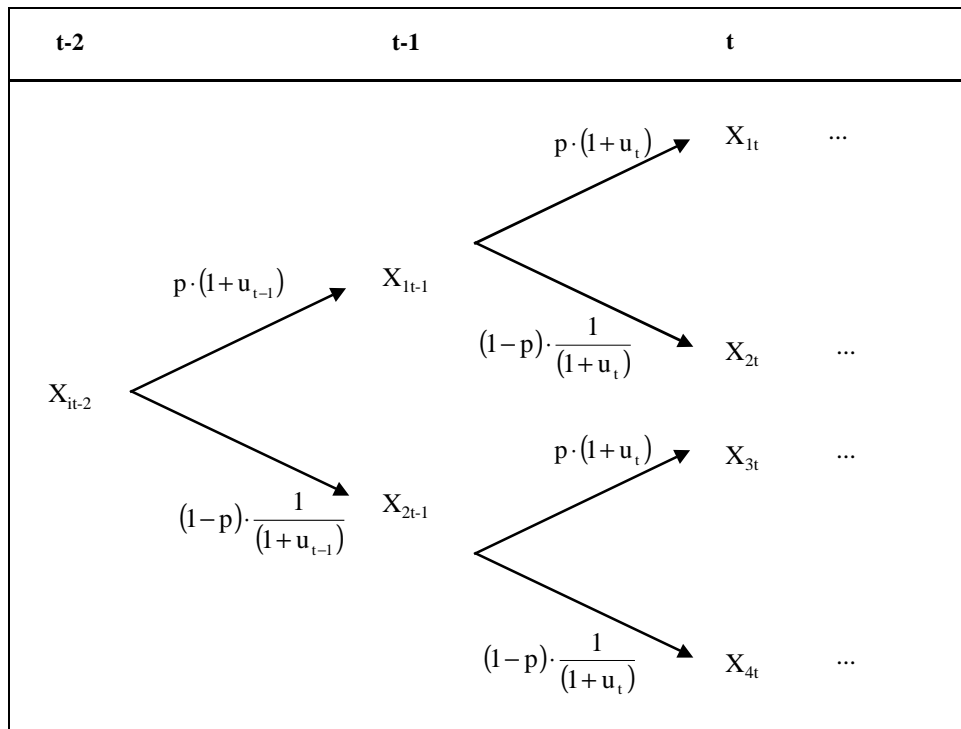


Abbildung 3: Binomialprozeß mit reziproken Wachstumsfaktoren

Überträgt man dieses Modell auf Beziehung (4.2), so ergibt sich z^{prag} auf Grundlage des Binomialprozesses:¹⁰⁴

$$z_t^{\text{prag}} = \left(\frac{pX_{jt-1}(1+u_t) + (1-p)\frac{X_{jt-1}}{(1+u_t)} - \frac{X_{jt-1}}{(1+u_t)}}{pX_{jt-1}(1+u_t) + (1-p)\frac{X_{jt-1}}{(1+u_t)}} \right) \cdot (1+i). \quad (4.3)$$

Die Höhe von z^{prag} ist nun nur noch vom betrachteten Zeitpunkt, nicht jedoch von den Umweltzuständen der Vorperioden abhängig.¹⁰⁵ Wären zusätzlich die Wachstumsfaktoren u zeitinvariant, so ergäbe sich ein auch im Zeitlauf konstanter Risikozuschlag.¹⁰⁶

Aufbauend auf dem formulierten Binomialprozeß leitet *Richter* nun einen alternativen Vorschlag für einen pragmatischen Risikozuschlag ab, welcher der Forderung nach Arbitragefreiheit genügen soll. Er bedient sich dabei der Grundidee, daß sich die Unsicherheit künftiger Überschüsse auch durch Modifikationen ihrer Wachstumsraten oder der Wachstumswahr

¹⁰⁴ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 7 und S. 19.

¹⁰⁵ Dies wird unmittelbar daran deutlich, daß sich X_{jt-1} aus Gleichung (4.3) kürzen läßt. Anders als in Beziehung (4.2) trägt der Zuschlag daher keinen Index j .

¹⁰⁶ Vgl. *Richter / Helmig* [Risikozuschläge, 2001], S. 10.

scheinlichkeiten im Kalkül verarbeiten läßt.¹⁰⁷ Hierzu wird der Erwartungswert der zustandsabhängigen Wachstumsraten g unter der Wahrscheinlichkeit p formuliert:¹⁰⁸

$$E[g_{jt}]_p := \bar{g}_{pt} = p(1 + u_t) + \frac{(1-p)}{(1+u_t)} - 1. \quad (4.4)$$

\bar{g}_{pt} läßt sich als diejenige Wachstumsrate interpretieren, von der ein risikoneutraler Bewerter ausgehen würde. Um die vorausgesetzte Risikoaversion des Bewerter zu modellieren, wird analog zu Beziehung (4.4) eine weitere, „risikoadjustierte Wachstumsrate“¹⁰⁹ unter der Wahrscheinlichkeit q definiert:

$$E[g_{jt}]_q := \bar{g}_{qt} = q(1 + u_t) + \frac{(1-q)}{(1+u_t)} - 1 \quad \text{mit } 0 < q \leq p \leq 1. \quad (4.5)$$

Entscheidend ist die Nebenbedingung $q \leq p$: Sie drückt die Risikoneigung in dem Sinne aus, daß der risikoaverse Bewerter einen Anstieg der Zahlungen für weniger wahrscheinlich und damit ein Absinken der Zahlungen als Gegenereignis für wahrscheinlicher hält als der risikoneutrale Bewerter ($\bar{g}_{qt} \leq \bar{g}_{pt}$).¹¹⁰ Wird q geeignet gewählt, so entsteht aus dem Erwartungswert einer Zahlung deren Sicherheitsäquivalent bzw. aus dem Erwartungswert der Wachstumsrate die risikoadjustierte Wachstumsrate.¹¹¹

Nimmt man die Wahrscheinlichkeit p sowie den Erwartungswert der Wachstumsrate unter p als gegeben an, so läßt sich der Wachstumsfaktor u_t aus Beziehung (4.4) gewinnen.¹¹² Fraglich ist nun, wie die Wahrscheinlichkeit q als einzige verbleibende Unbekannte und als Parameter der Risikoaversion zu bestimmen ist. Aus der in (4.5) gegebenen Nebenbedingung ergibt sich, daß q einem Bruchteil x von p entsprechen muß: $q = x \cdot p$ mit $0 < x \leq 1$. Das Problem verlagert sich damit auf die Bestimmung von x . Hierzu greift Richter auf das Sharpe-

¹⁰⁷ Vgl. Richter [Rules, 2001], S. 179.

¹⁰⁸ Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 8; Richter [Rules, 2001], S. 184.

¹⁰⁹ Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 8; Richter [Rules, 2001], S. 184.

¹¹⁰ Für das Ereignis „Anstieg“ gilt z.B. $q(1+u_t) < p(1+u_t)$.

¹¹¹ Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 8.

¹¹² Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 9.

Ratio Φ_m zurück¹¹³, das die von den Investoren erwartete Kapitalmarktrendite $E[r_m]$, deren Standardabweichung σ_m sowie den risikolosen Zinssatz miteinander in Beziehung setzt:¹¹⁴

$$x := 1 - \Phi_m \quad \text{mit} \quad \Phi_m = \frac{E[r_m] - i}{\sigma_m}. \quad (4.6)$$

Damit sind alle notwendigen Eingangsgrößen bestimmt, um einen Risikozuschlag z^{arb} zu ermitteln, der sich an der Bedingung arbitragefreier Märkte orientiert:¹¹⁵

$$z_t^{\text{arb}} = \left(\frac{1 + \bar{g}_{\text{pt}}}{1 + \bar{g}_{\text{qt}}} - 1 \right) \cdot (1 + i). \quad (4.7)$$

Bei $E[r_m]$ und σ_m handelt es sich um künftige Größen, wie sie die Anleger am Kapitalmarkt erwarten. Da der Bewerter diese Erwartungen regelmäßig nicht kennt, muß er sie schätzen. Das „Pragmatische“ an Richters Ansatz ist darin zu sehen, daß er nicht auf das tatsächlich von den Investoren erwartete Sharpe-Ratio abstellt, sondern die risikoadjustierte Wahrscheinlichkeit q aus dem zulässigen Intervall ($0 < q \leq p \leq 1$) mit Hilfe historischer Schätzer greift.¹¹⁶

Inwieweit wird z^{arb} nun dem eigenen Anspruch gerecht, die Vorteile von z^{prag} aufzuweisen und zugleich dessen Nachteile zu vermeiden? Aus Gleichung (4.7) läßt sich ablesen, daß z^{arb} – ebenso wie z^{prag} – mit steigendem (sinkendem) Risiko größer (kleiner) wird. Als Risikomaß fungiert dabei die Differenz zwischen p und q , die sich aus Φ_m bzw. x bestimmt. Im Sicherheitsfall nimmt sie den Wert Null an, woraus $z^{\text{arb}} = 0$ folgt. Bewegt sich weiterhin x im zulässigen Intervall $0 < x \leq 1$, so übersteigt z^{arb} den maximalen logisch begründbaren Grenzwert für Risikozuschläge¹¹⁷ nicht. Verengt man den Bereich, aus dem x gezogen werden darf, weiterhin auf $0,5 < x \leq 1$, dann liegt z^{arb} auch stets unter z^{prag} . Wird x indes nicht aus dem zulässigen Bereich gezogen, sondern mit Hilfe des Sharpe-Ratio aus Kapitalmarktdaten gewonnen, so können für $\Phi_m > 1$ bzw. $\Phi_m > 0,5$ arbitragefreie Zuschläge resultieren, welche die logischen Grenzen sprengen bzw. z^{prag} übertreffen. In diesem Fall müßten die Eingangsparameter des Sharpe-Ratio jedoch Werte annehmen, die empirisch kaum beobachtbar sind.¹¹⁸ In „nor-

¹¹³ Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 9-10.

¹¹⁴ Das Sharpe-Ratio wird üblicherweise als ex-post-Kennziffer zur Performance-Messung eingesetzt und drückt die Risikoprämie je Einheit des übernommenen Gesamtrisikos aus. Vgl. etwa Perridon / Steiner [Finanzwirtschaft, 1997], S. 295-296.

¹¹⁵ Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 9; Richter [Rules, 2001], S. 184.

¹¹⁶ Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 9.

¹¹⁷ Dieser wird bei $\Phi_m = 1$ erreicht. Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 11.

¹¹⁸ Um $\Phi_m > 1$ ($> 0,5$) zu erreichen, müßte die erwartete Marktrendite bei einem risikolosen Zinssatz in Höhe von 6% und einer Standardabweichung in Höhe von 30% über 36% (21%) liegen. Vgl. Richter / Helmig [Risikozuschläge, 2001], S. 11. Für den DAX als Stellvertreter des Marktportfolios ergab sich demgegenüber im

malen“ Kapitalmarktsituationen vereint z^{arb} damit sämtliche Vorteile auf sich, die auch z^{prag} zugute gehalten werden, und vermeidet zudem dessen Schwachpunkt, sehr hohe Werte anzunehmen.

Es stellt sich jedoch die Frage, inwieweit man sich überhaupt bei der Ableitung von Risikozuschlägen im Kontext der Unternehmensbewertung von den Prinzipien der Wertadditivität oder Arbitragefreiheit leiten lassen sollte. Wertadditivität bedeutet, daß sich der Unternehmenswert aus der Summe der Kapitalwerte der im Unternehmen gebundenen Investitionsprojekte zusammensetzt.¹¹⁹ Herrscht Wertadditivität, so existieren keine Synergieeffekte zwischen einzelnen Investitionsprojekten oder Unternehmen¹²⁰, was auch die Möglichkeiten des Unternehmenskäufers negiert, die zu bewertenden Zahlungsströme zu beeinflussen.¹²¹ Derartige Situationen widersprechen der Empirie.¹²²

Weiterhin bleibt offen, inwieweit es sich bei z^{arb} um einen arbitragefreien und zugleich um einen pragmatischen Zuschlag handeln kann: z^{arb} erfüllt das Prinzip der Arbitragefreiheit nur dann, wenn Φ_m jenem Wert entspricht, den die Kapitalmarktteilnehmer tatsächlich erwarten.¹²³ Versucht der Bewerter nun, Φ_m unter Rückgriff auf die Erwartungen des Kapitalmarktes festzulegen, so verliert das Konzept an Pragmatik. Wird Φ_m dagegen aus dem zulässigen Intervall gegriffen, so ist z^{arb} zwar pragmatisch, genügt aber nur zufällig der Forderung nach Arbitragefreiheit. Darüber hinaus bleibt dann unklar, an welchen Anhaltspunkten sich eine Ziehung aus der Bandbreite zulässiger Φ_m orientieren soll.

Daneben ist – im Vergleich mit z^{prag} – zu prüfen, ob die Bedingungen, unter denen der arbitragefreie Risikozuschlag abgeleitet wurde, für Zwecke der Unternehmensbewertung adäquat sind. Hier ist zunächst die Annahme des Binomialprozesses restriktiv¹²⁴, wonach die Über-

Zeitraum zwischen 1981 und 2001 eine durchschnittliche Marktrendite von 14,6% bei einer durchschnittlichen Standardabweichung von 27,9% und einem Sharpe-Ratio vom 0,42. Vgl. *Albrecht* [Szenarioanalysen, 2001], S. 2.

¹¹⁹ Vgl. *Schäfer* [Unternehmensinvestitionen, 1999], S. 330; *Franke / Hax* [Finanzwirtschaft, 2000], S. 324-325 und S. 336. Wertadditivität und Arbitragefreiheit hängen unmittelbar zusammen: Auf einem Markt herrscht keine Wertadditivität, wenn der Marktwert eines gegebenen Zahlungsstroms von der Summe der Marktwerte seiner Teilströme abweicht. Auf solchen Märkten können Investoren risikolose Gewinne (Arbitragegewinne) erzielen, indem sie etwa die Teilströme kaufen und zugleich den Gesamtstrom verkaufen.

¹²⁰ Vgl. *Franke / Hax* [Finanzwirtschaft, 2000], S. 325-326.

¹²¹ Vgl. *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 175-176; *Ballwieser / Leuthier* [Grundprinzipien, 1986], S. 607; *Hachmeister* [Unternehmenswertsteigerung, 2000], S. 175.

¹²² Vgl. *Ballwieser* [Komplexitätsreduktion, 1990], S. 176. Die aus diesen Möglichkeiten und Synergien resultierenden control premiums lagen in den USA während der Jahre 1982 und 2000 bei 40 Prozent, was die Vernachlässigung von Paketzuschlägen als gefährlich erscheinen läßt.. Vgl. *Gaughan* [Mergers, 2002], S. 520-522.

¹²³ Vgl. *Richter / Helms* [Risikozuschläge, 2001], S. 11.

¹²⁴ Vgl. bezogen auf Aktien etwa *Schäfer* [Unternehmensinvestitionen, 1999], S. 367.

schußverteilung, ausgehend von einem Zeitpunkt $t-1$, jeweils nur zwei Werte annehmen kann. Ferner erscheint insbesondere die Vorstellung wenig realitätsgerecht, daß die Wachstumswahrscheinlichkeit p im Zeitlauf sowie über alle Umweltzustände konstant sein soll. Ebenso hart ist die Bedingung reziproker Wachstumsfaktoren, die weiterhin unabhängig von den in $t-1$ realisierten Umweltzuständen sein sollen. Es verwundert daher nicht, daß die Wertadditivitätseigenschaft von z^{arb} verlorengeht, wenn man diese idealisierte Welt verläßt, etwa indem man die Annahme reziproker Wachstumsfaktoren der Zahlungen aufgibt.¹²⁵ Anders als z^{prag} ist z^{arb} an den spezifischen Binomialprozeß und damit an die genannten Annahmen gebunden. Insoweit stellt z^{prag} das flexiblere Konzept dar.

5. Thesenförmige Zusammenfassung

- (1) Der Kritik *Kürstens*, die Sicherheitsäquivalentmethode sei nur im Falle periodenweise identischer, linearer Nutzenfunktionen mit der Axiomatik des *Bernoulli*-Kriteriums kompatibel, kann nicht gefolgt werden. Sie basiert darauf, daß dem Zinssatz mit der Erfassung von Zeitpräferenzen eine Funktion zugeschrieben wird, die dieser nicht zu erfüllen hat und die im Rahmen der Unternehmensbewertung aus Gründen der Komplexitätsreduktion bewußt ausgeblendet wird. Umgekehrt vernachlässigt der von *Kürsten* postulierte Ansatz die im Zinsfuß zum Ausdruck kommenden Möglichkeiten des Investors, sich die aus dem Unternehmen fließenden Erträge alternativ besorgen zu können. Werden Zinssatz und Zeitpräferenz sauber voneinander getrennt, so folgt daraus, daß man mit der Sicherheitsäquivalentmethode theoriegeleitet vorgehen kann.
- (2) Geht man indes von der Existenz einer übergeordneten Gesamtnutzenfunktion aus, so bedeutet deren Zerlegung stets, daß restriktive Annahmen zu akzeptieren sind. Existiert diese Gesamtnutzenfunktion, wie *Kürsten* voraussetzt, so muß jene nicht mehr dekomponiert werden, und diese Prämissen fallen weg. Zweifel an der Anwendbarkeit des von *Kürsten* vorgeschlagenen Ansatzes sowie ein Blick auf verfügbare alternative Ansätze in Gestalt von Kapitalmarktmodellen legen den Schluß nahe, daß der Bewerter bei der Aufstellung des Bewertungsmodells entweder mit restriktiven Annahmen leben oder von der Gewinnbarkeit umfassender anwendbarer Modelle (weiterhin) träumen muß.
- (3) Die in der Unternehmensbewertungsliteratur geführte Diskussion über Zusammenhänge zwischen Risikoauflösung und stochastischen (Un-)Abhängigkeitseigenschaften von Ü-

¹²⁵ Vgl. dazu die Beispiele bei *Richter / Helms* [Risikozuschläge, 2001], S. 15.

berschußverteilungen hat ihre Berechtigung, wenn man Risiko aus Sicht des Bewertungszeitpunktes als Risikoprämie in Form der Differenz zwischen Erwartungswert und Sicherheitsäquivalent definiert und dementsprechend unter Risikoauflösung die *erwartete* Verminderung dieser Risikoprämie versteht. Dann löst sich das Risiko im Fall abhängiger (unabhängiger) Verteilungen allmählich (schlagartig) auf. Demgegenüber vernachlässigt die isolierte Betrachtung der in den jeweiligen *bedingten* Verteilungen enthaltenen Risiken intertemporale Kovarianzrisiken. Diese sind vom Bewertungszeitpunkt aus gesehen relevant, so daß sie bei der Diskussion über Risikoauflösung im Kontext der in der Unternehmensbewertung gegebenen ex ante-Perspektive sinnvollerweise berücksichtigt werden *müssen*.

- (4) Um Ermessensspielräume bei der Ermittlung von Risikozuschlägen zu begrenzen, ohne auf Sicherheitsäquivalente zurückgreifen zu müssen, können pragmatische Normen zur Gewinnung von Risikokorrekturfaktoren hilfreich sein. Die durch sie erreichte verbesserte Anwendbarkeit geht regelmäßig zu Lasten der Zweckgerechtigkeit. Dieses Problem teilen z^{prag} und z^{arb} . Das Vorhaben *Richters*, mit z^{arb} eine höhere Zweckgerechtigkeit als durch *Ballwiesers* z^{prag} zu erreichen, ist hinsichtlich der problematischen Leitlinie der Wertadditivität skeptisch einzuschätzen, zumal die Erfüllung der Wertadditivitätseigenschaft durch zahlreiche restriktive Annahmen erkaufte wird. Eine verbesserte Anwendbarkeit läßt sich nicht ausmachen, da zur Ermittlung von z^{arb} mehr Eingangsparameter als für z^{prag} benötigt werden.

Anhang

Wir gehen aus von

- 1) einer Periodennutzenfunktion, die strikt konkav ist, also strikt Risikoaversion gewährleistet, sowie
- 2) dem in Abbildung 2 beschriebenen Binomialprozeß (ohne Gültigkeit der konkreten Zahlenwerte).

Zu prüfen ist folgende These für den Fall *unabhängiger* Verteilungen:

$$\text{RP}[\tilde{X}_2] - E[\text{RP}_{12}, \text{RP}_{22}] = 0. \quad (6.1)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{RP}[\tilde{X}_2] - E[\text{RP}_{21}, \text{RP}_{22}] &= E[\tilde{X}_2] - S[\tilde{X}_2] - (p_{11} \cdot \text{RP}_{21} + p_{12} \cdot \text{RP}_{22}) = \\ &\left(p_{11} \cdot \left(\underbrace{p_{21} \cdot X_{21} + p_{22} \cdot X_{22}}_i \right) + p_{12} \cdot \left(\underbrace{p_{23} \cdot X_{23} + p_{24} \cdot X_{24}}_m \right) \right) - \\ &U^{-1} \left(p_{11} \cdot \left(\underbrace{p_{21} \cdot U(X_{21}) + p_{22} \cdot U(X_{22})}_w \right) + p_{12} \cdot \left(\underbrace{p_{23} \cdot U(X_{23}) + p_{24} \cdot U(X_{24})}_v \right) \right) - \\ &\left\{ p_{11} \cdot \left[\left(\underbrace{p_{21} \cdot X_{21} + p_{22} \cdot X_{22}}_i \right) - U^{-1} \left(\underbrace{p_{21} \cdot U(X_{21}) + p_{22} \cdot U(X_{22})}_w \right) \right] + \right. \\ &\left. p_{12} \cdot \left[\left(\underbrace{p_{23} \cdot X_{23} + p_{24} \cdot X_{24}}_m \right) - U^{-1} \left(\underbrace{p_{23} \cdot U(X_{23}) + p_{24} \cdot U(X_{24})}_v \right) \right] \right\} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

oder kürzer:

$$\begin{aligned} &(p_{11} \cdot i + p_{12} \cdot m) - U^{-1}(p_{11} \cdot (w) + p_{12} \cdot (v)) - \\ &\{(p_{11} \cdot i + p_{12} \cdot m) - (p_{11} \cdot U^{-1}(w) + p_{12} \cdot U^{-1}(v))\} = \\ &-U^{-1}(p_{11} \cdot (w) + p_{12} \cdot (v)) + p_{11} \cdot U^{-1}(w) + p_{12} \cdot U^{-1}(v) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Da im Falle *unabhängiger* Verteilungen die bedingten Verteilungen und damit auch die *bedingten* Erwartungsnutzenwerte w und v *gleich* sind, folgt für $w = v \equiv \bar{s}$:

$$-U^{-1}(p_{11} \cdot \bar{s} + p_{12} \cdot \bar{s}) + p_{11} \cdot U^{-1}(\bar{s}) + p_{12} \cdot U^{-1}(\bar{s}) = 0 \quad (6.4)$$

Da $p_{11} + p_{12} = 1$, ergibt sich

$$-U^{-1}(\bar{s}) + U^{-1}(\bar{s}) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0. \quad \text{q.e.d.} \quad (6.5)$$

Da sich die Wahrscheinlichkeiten eines jeden „Teilbaumes“ *stets* zu 1 addieren und die Identität der bedingten Sicherheitsäquivalente mit Blick auf einen Zeitpunkt im Fall unabhängiger Verteilungen *stets* erhalten bleibt, lassen sich (6.4) und (6.5) verallgemeinern.

Für den Fall *abhängiger* Verteilungen gilt es zu beweisen:

$$\text{RP}[\tilde{X}_2] - E[\text{RP}_{21}, \text{RP}_{22}] > 0. \quad (6.6)$$

Bis zu Schritt (6.3) kann man analog zum Fall unabhängiger Verteilungen verfahren und gelangt zu

$$U^{-1}(p_{11} \cdot (w) + p_{12} \cdot (v)) \stackrel{!}{<} p_{11} \cdot U^{-1}(w) + p_{12} \cdot U^{-1}(v). \quad (6.7)$$

Wir gehen für den Fall *abhängiger* Verteilungen davon aus, daß die bedingten Erwartungsnutzenwerte w und v *nicht* gleich sind ($w \neq v$), und sehen damit von dem Spezialfall ab, daß sich trotz unterschiedlicher bedingter Lotterien die gleichen Erwartungsnutzenwerte ergeben können, wenn sich Wahrscheinlichkeiten und Nutzenwerte im Ergebnis zufällig kompensieren.

Aus der Annahme der *streng konkaven* Nutzenfunktion folgt:¹²⁶

$$U(p_{11} \cdot (w) + p_{12} \cdot (v)) > p_{11} \cdot U(w) + p_{12} \cdot U(v) \quad \text{für } w \neq v \quad (6.8)$$

Dann gilt für die Inverse der Nutzenfunktion die Konvexitätseigenschaft:

$$U^{-1}(p_{11} \cdot (w) + p_{12} \cdot (v)) < p_{11} \cdot U^{-1}(w) + p_{12} \cdot U^{-1}(v) \quad (6.9)$$

und (6.7) ist erfüllt.

Die sog. Jensen'sche Ungleichung (6.8) und dementsprechend (6.9) bleibt bei n -Punkt-Verteilungen erhalten.

¹²⁶ Vgl. etwa Schneeweiß [Grundlagen, 1991], S. 199.

Literaturverzeichnis

- Albrecht, Peter* [Szenarioanalysen, 2001]: Die Kapitalanlage der Lebensversicherer unter Performance- und Risikoaspekten: Szenarioanalysen per Ultimo 2001, Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 135, Mannheim 2001.
- Ballwieser, Wolfgang* [Möglichkeiten, 1980]: Möglichkeiten der Komplexitätsreduktion bei einer prognose-orientierten Unternehmensbewertung, in: *zfbf*, 32. Jg. (1980), S. 50-73.
- Ballwieser, Wolfgang* [Wahl, 1981]: Die Wahl des Kalkulationszinsfußes bei der Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung von Risiko und Geldentwertung, in: *BFuP*, 33. Jg. (1981), S. 97-114.
- Ballwieser, Wolfgang* [Geldentwertung, 1988]: Unternehmensbewertung bei unsicherer Geldentwertung, in: *zfbf*, 40. Jg. (1988), S. 798-812.
- Ballwieser, Wolfgang* [Komplexitätsreduktion, 1990]: Unternehmensbewertung und Komplexitätsreduktion, 3., überarb. Aufl., Wiesbaden 1990, Nachdruck 1993.
- Ballwieser, Wolfgang* [Methoden, 1993]: Methoden der Unternehmensbewertung, in: *Gebhardt, Günther / Gerke, Wolfgang / Steiner, Manfred* (Hrsg.): *Handbuch des Finanzmanagements*, München 1993, S. 151-176.
- Ballwieser, Wolfgang* [Kalkulationszinsfuß, 1997]: Kalkulationszinsfuß und Steuern, in: *DB*, 50. Jg. (1997), S. 2393-2396.
- Ballwieser, Wolfgang* [Verfahren, 1998]: Unternehmensbewertung mit Discounted Cash Flow-Verfahren, in: *WPg*, 51. Jg. (1998), S. 81-92.
- Ballwieser, Wolfgang* [Unternehmensbewertung, 2001]: Unternehmensbewertung, in: *Gerke, Wolfgang / Steiner, Manfred* (Hrsg.): *Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens*, 3. Aufl., Stuttgart 2001, Sp. 2082-2095.
- Ballwieser, Wolfgang* [Marktorientierung, 2001]: Unternehmensbewertung, Marktorientierung und Ertragswertverfahren, in: *Zum Erkenntnisstand der Betriebswirtschaftslehre am Beginn des 21. Jahrhunderts*, FS für Erich Loitlsberger, Berlin 2001, S. 17-31.
- Ballwieser, Wolfgang / Leuthier, Rainer* [Grundprinzipien, 1986]: Grundprinzipien, Verfahren und Probleme der Unternehmensbewertung (Teil II), in: *DStR*, 24. Jg. (1986), S. 604-610.
- Bamberg, Günter / Coenenberg, Adolf G.* [Entscheidungslehre, 2000]: *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*, 10., überarb. und erw. Aufl., München 2000.

- Bamberg, Günter / Spremann, Klaus* [Implications, 1981]: Implications of Constant Risk Aversion, in: *Zeitschrift für Operations Research*, Vol. 25 (1981), S. 205-224.
- Bitz, Michael* [Entscheidungstheorie, 1981]: Entscheidungstheorie, München 1981.
- Diedrich, Ralf* [Konzeptionen, 1996]: Zur Relevanz alternativer entscheidungstheoretischer Konzeptionen für die ökonomische Forschung, in: *BFuP*, 48. Jg. (1996), S. 617-639.
- Drukarczyk, Jochen* [Konsumpräferenz, 1970]: Investitionstheorie und Konsumpräferenz, Berlin 1970.
- Drukarczyk, Jochen* [Unternehmensbewertung, 2001]: Unternehmensbewertung, 3. Aufl., München 2001.
- Dyckhoff, Harald* [Kompensation, 1985]: Kompensation bei Entscheidungskriterien, in: *OR Spektrum*, 7. Jg. (1985), S. 195-207.
- Eisenführ, Franz* [Zeitpräferenzen, 1988]: Zeitpräferenzen über buchmäßigen Erfolgen, in: *Domsch, Michel / Eisenführ, Franz / Ordelleide, Dieter / Perlitz, Manfred* (Hrsg.): Unternehmenserfolg, FS für Walther Busse von Colbe, Wiesbaden 1988, S. 127-139.
- Eisenführ, Franz / Weber, Martin* [Entscheiden, 1993]: Rationales Entscheiden, Berlin u.a. 1993.
- Fama, Eugene F.* [Uncertainty, 1977]: Risk-adjusted Discount Rates and Capital Budgeting under Uncertainty, in: *Journal of Financial Economics*, Vol. 5 (1977), S. 3-24.
- Fisher, Irving* [Zinstheorie, 1932]: Die Zinstheorie, Jena 1932.
- Fischer, Thomas R. / Hahnenstein, Lutz / Heitzer, Bernd* [Ansätze, 1999]: Kapitalmarkttheoretische Ansätze zur Berücksichtigung von Handlungsspielräumen in der Unternehmensbewertung, in: *ZfB*, 69. Jg. (1999), S. 1207-1232.
- Fishburn, Peter C.* [Independence, 1965]: Independence in Utility Theory with whole Product Sets, in: *Operations Research*, Vol. 13 (1965), S. 28-45.
- Franke, Günter / Hax, Herbert* [Finanzwirtschaft, 2000]: Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 4. Aufl., Berlin u.a. 2000.
- Gaughan, Patrick A.* [Mergers, 2002]: Mergers, Acquisitions, and Corporate Restructurings, 3. Aufl., New York 2002.
- Hachmeister, Dirk* [Diskontierung, 1998]: Diskontierung unter Unsicherheit, in: *Kruschwitz, Lutz / Löffler, Andreas* (Hrsg.): Ergebnisse des Berliner Workshops „Unternehmensbewertung“ vom 7. Februar 1998, Diskussionsbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft der Freien Universität Berlin, Nr. 1998/7, S. 25-33.

Hachmeister, Dirk [Unternehmenswertsteigerung, 2000]: Der Discounted Cash Flow als Maß der Unternehmenswertsteigerung, 4., durchgesehene Aufl., Frankfurt am Main 2000.

Hakansson, Nils H. [Model, 1969]: On the Dividend Capitalization Model under Uncertainty, in: *Journal of Quantitative Analysis*, Vol. 4 (1969), S. 65-87.

Hirshleifer, Jack [Decision, 1958]: On the Theory of optimal Investment Decision, in: *Journal of Political Economy*, Vol. 66 (1958), S. 329-352.

Hirshleifer, Jack [Kapitaltheorie, 1974]: Kapitaltheorie, Köln 1974.

Keeney, Ralph L. / Raiffa, Howard [Decisions, 1993]: Decisions with Multiple Objectives, Preferences and Value Tradeoffs, Cambridge 1993.

Köth, Uwe [Differenzierungsmöglichkeiten, 1979]: Differenzierungsmöglichkeiten individueller Präferenzen und ihre Berücksichtigung bei der Bewertung unsicherer Zahlungsströme, München 1979.

Kruschwitz, Lutz [Finanzierung, 1995]: Finanzierung und Investition, Berlin / New York 1995.

Kruschwitz, Lutz [Risikozuschläge, 2001]: Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien in der Unternehmensbewertung, in: *DB*, 54. Jg. (2001), S. 2409-2413.

Kürsten, Wolfgang [Kardinalität, 1992]: Präferenzmessung, Kardinalität und sinnmachende Aussagen, Enttäuschung über die Kardinalität des Bernoulli-Nutzens, in: *ZfB*, 62. Jg. (1992), S. 459-477.

Kürsten, Wolfgang [Grundlagen, 1997]: Neoklassische Grundlagen „moderner“ Finanzierungstheorie, in: *Homo oeconomicus*, Bd. XIV (1/2), München 1997, S. 63-98.

Kürsten, Wolfgang [Theoriedefizit, 2002]: „Unternehmensbewertung unter Unsicherheit“, oder: Theoriedefizit einer künstlichen Diskussion über Sicherheitsäquivalent- und Risikozuschlagsmethode, in: *zfbf*, 54. Jg. (2002), S. 128-144.

Laux, Helmut [Grundlagen, 1991]: Entscheidungstheorie I, Grundlagen, 2., verbesserte Auflage, Berlin u.a. 1991.

Laux, Helmut [CAPM, 1998]: Marktwertmaximierung und CAPM im Ein- und Mehrperioden-Fall, Working Paper Series: Finance and Auditing, No. 19, Frankfurt am Main 1998.

Lehmann, Matthias [Zeitpräferenz, 1975]: Zur Theorie der Zeitpräferenz, Berlin 1975.

Löffler, Andreas [Paradox, 2001]: Ein Paradox der Portfoliotheorie und vermögensunabhängige Nutzenfunktionen, Wiesbaden 2001.

- Mandl, Klaus / Rabel, Gerwald* [Unternehmensbewertung, 1997]: Unternehmensbewertung, Eine praxisorientierte Einführung, Wien 1997.
- Moxter, Adolf* [Grundsätze, 1991]: Grundsätze ordnungsmäßiger Unternehmensbewertung, 2., vollst. umgearb. Aufl., Wiesbaden 1983, Nachdruck 1991.
- Neumann, John von / Morgenstern, Oskar* [Spieltheorie, 1967]: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, 2., unveränderte Aufl., Würzburg 1967.
- Perridon, Louis / Steiner, Manfred* [Finanzwirtschaft, 1997]: Finanzwirtschaft der Unternehmung, 9. Aufl., München 1997.
- Richter, Frank* [Rules, 2001]: Simplified Discounting Rules in Binomial Models, in: sbr, 53. Jg. (2001), S. 175-196.
- Richter, Frank / Helmis, Sven* [Risikozuschläge, 2001]: Pragmatische Risikozuschläge, Sharpe-Ratio und Wertadditivität, Wittener Diskussionspapiere, Heft. Nr. 87, Witten 2001.
- Robichek, Alexander A.* [Risk, 1969]: Risk in the Value of Securities, in: Journal of Quantitative Analysis, 4. Jg. (1969), S. 513-538.
- Robichek, Alexander A. / Myers, Stewart C.* [Problems, 1966]: Conceptual Problems in the Use of Risk-Adjusted Discount Rates, in: Journal of Finance, Vol. 21 (1966), S. 727-730.
- Schäfer, Henry* [Unternehmensinvestitionen, 1999]: Unternehmensinvestitionen, Grundzüge, Theorie und Management, Heidelberg 1999.
- Schildbach, Thomas / Sieben, Günter* [Entscheidungstheorie, 1990]: Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie, 3., überarbeitete und erweiterte Aufl., Düsseldorf 1990.
- Schmidt, Reinhard H. / Terberger, Eva* [Grundzüge, 1997]: Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie, 4., aktualisierte Aufl., Wiesbaden 1997.
- Schneeweiß, Hans* [Entscheidungskriterien, 1967]: Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin u.a. 1967.
- Schneeweiß, Hans* [Grundlagen, 1991]: Systemanalytische und entscheidungstheoretische Grundlagen, Berlin u.a. 1991.
- Schwetzler, Bernhard* [Wachstum, 2000]: Der Einfluß von Wachstum, Risiko und Risikoauflösung auf den Unternehmenswert, HHL-Arbeitspapier Nr. 35, Leipzig 2000.
- Schwetzler, Bernhard* [Unsicherheit, 2000]: Unternehmensbewertung unter Unsicherheit – Sicherheitsäquivalent- oder Risikozuschlagsmethode?, in: zfbf, 52. Jg. (2000), S. 469-486.

Schwetzler, Bernhard [Risiko, 2002]: Unternehmensbewertung und Risiko, in: DB, 55. Jg. (2002), S. 390-391.

Schwetzler, Bernhard [Ende, 2002]: Das Ende des Ertragswertverfahrens?, in: zfbf, 54. Jg. (2002), S. 145-158.

Siepe, Günter [Kapitalisierungszinssatz, 1998]: Kapitalisierungszinssatz und Unternehmensbewertung, in: WPg, 51. Jg. (1998), S. 325-338.

Weber, Martin [Entscheidungen, 1983]: Entscheidungen bei Mehrfachzielen, Verfahren zur Unterstützung von Individual- und Gruppenentscheidungen, Wiesbaden 1983.

Wilhelm, Jochen [Finanztitelmärkte, 1983]: Finanztitelmärkte und Unternehmensfinanzierung, Berlin u.a. 1983.

Wilhelm, Jochen [Risikoprämien, 2002]: Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien, Finanzierungstheoretische Anmerkungen zu einem Grundproblem der Unternehmensbewertung, Betriebswirtschaftliche Reihe, Diskussionsbeitrag B-9-02, Passau 2002.

Jörg Wiese

Universität München

Seminar für Rechnungswesen und Prüfung

Ludwigstr. 28/RG

Tel.: +49-89-2180-6204

Fax.: +49-89-2180-6327

E-mail: wiese@bwl.uni-muenchen.de

<http://www.bwl.uni-muenchen.de>

Semi-subjektive Bewertung

Lutz Kruschwitz und Andreas Löffler¹

Version vom 26.05.2002

¹Prof. Dr. Lutz Kruschwitz, Institut für Bank- und Finanzwirtschaft der Freien Universität Hannover; Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler, Institut für Banken und Finanzierung der Universität Hannover. Die Autoren danken dem Verein zur Förderung der Zusammenarbeit zwischen Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V. für seine Unterstützung. Wolfgang Kürsten und Jochen Wilhelm danken wir für eine anregende Diskussion.

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung	1
2 Modellentwurf	2
3 Bewertung im semi-subjektiven Modell	6
3.1 Sichere künftige Zahlungen	6
3.2 Unsichere künftige Zahlungen	7
3.2.1 CARA-Nutzenfunktionen	7
3.2.2 Logarithmische Nutzenfunktion	9
4 Ergebnis	10

1 Problemstellung

Die Berücksichtigung der Unsicherheit ist ein wichtiges Problem der Unternehmensbewertung. Für gegebene Verteilungen künftiger Cashflows kann dies nach herrschender Meinung entweder im Rahmen eines subjektiven (auch: individualistischen) Ansatzes oder mit Hilfe eines objektiven (auch: marktorientierten) Konzeptes erfolgen.

Die subjektive Vorgehensweise zeichnet sich dadurch aus, dass auf Präferenzen zurückgegriffen wird, die für den Bewerter beziehungsweise das Individuum charakteristisch sind, in dessen Auftrag der Bewerter handelt. Ohne Kenntnis der Nutzenfunktion misslingt diese Form der Unternehmensbewertung. Der objektive Ansatz kommt dagegen ohne die Kenntnis individueller Präferenzen aus. Er verwendet die real beobachtbaren Marktpreise riskanter Assets. Diese Assets müssen sich dazu eignen, die Cashflows des zu bewertenden Unternehmens zu duplizieren. Misslingt die Duplikation oder sind die Marktpreise der relevanten Assets nicht beobachtbar, so schlägt diese Form der Unternehmensbewertung fehl. Es ist unbestreitbar, dass sich in den Marktpreisen der für die Duplikation heranzuziehenden Assets die Nutzenvorstellungen aller relevanten Marktteilnehmer irgendwie niederschlagen, weswegen auch das objektive Bewertungskonzept letztlich präferenzabhängig ist. Da die Nutzenvorstellungen allerdings im Dunkeln bleiben, pflegt man die objektive Vorgehensweise als präferenzunabhängig zu charakterisieren.

Kürzlich ist zwischen *Kürsten* (2002) und *Schwetzler* (2002) eine Diskussion entbrannt, in der es unter anderem um die Frage ging, ob sich die Methode der Diskontierung von Sicherheitsäquivalenten mit risikolosen Zinssätzen entscheidungstheoretisch fundieren lässt. *Kürsten* wies nach, dass im Rahmen des subjektiven Ansatzes eine solche Fundierung allenfalls dann gelingt, wenn man dem Bewerter Risikoneutralität attestiert. Daraus wurde der Schluss gezogen, dass die Sicherheitsäquivalenz-Methode keine entscheidungstheoretisch akzeptable Grundlage besitzt: Die Idee, überhaupt mit Sicherheitsäquivalenten zu arbeiten, beruht nach allgemeinem Verständnis auf der Voraussetzung, dass der Unternehmensbewerter risikoavers ist und nicht etwa Risikoneutralität an den

Tag legt.¹

Nun unterscheidet sich die Welt, welche *Kürsten* betrachtet, an einer wichtigen Stelle von der Modellwelt, in der andere Autoren über die Sicherheitsäquivalenz-Methode diskutieren wollen. In *Kürstens* individualistischer Modellwelt, werden weder sichere noch unsichere finanzielle Assets gehandelt. Sollten sie dennoch gehandelt werden, so spielen sie in seinen Überlegungen jedenfalls keine Rolle. Dagegen unterstellen *Schwetzler* und andere Kontrahenten, die sich zur Sicherheitsäquivalenz-Methode äußern, dass es zwar keinen für Duplikationszwecke geeigneten Kapitalmarkt gibt, dass aber immerhin ein risikoloser Zinssatz existiert, zu dem man Geld anlegen und Kredit aufnehmen kann.

Im Folgenden werden auch wir unterstellen, dass zum risikolosen Zinssatz Geld angelegt und Kredit aufgenommen werden kann. Im Unterschied zu Autoren, die die Sicherheitsäquivalenz-Methode vor der *Kürstenschen* Kritik für vertretbar gehalten haben und sie nach Kenntnis seiner Kritik weiterhin für ein ernst zu nehmendes Konzept halten, werden wir diesen Aspekt jedoch in die Nutzentheorie selbst zu integrieren versuchen. Damit verliert unser Ansatz den unschuldigen Charakter der reinen Subjektivität. Da wir jedoch keinerlei Annahmen treffen werden, die uns gestatten werden, unsichere Cashflows mit Hilfe von Kapitalmarkttransaktionen zu duplizieren, werden wir ein Modell diskutieren, das sich zwischen Subjektivität und Objektivität im anfangs beschriebenen Sinne bewegt. Um auch terminologisch deutlich zu machen, dass wir damit den reinen Individualismus im Sinne von *Kürsten* verlassen, wollen wir unser Konzept als *semi-subjektiv* kennzeichnen. Wir wollen also ein Unternehmen mit Hilfe subjektiver Nutzenfunktionen bewerten und zugleich unterstellen, dass es einen zumindest unvollständigen Kapitalmarkt gibt. Nach unserer Kenntnis ist dieser Ansatz neu.

Wir werden zunächst das Modell einer semi-subjektiven Bewertung entwickeln. Auf dieser Grundlage werden wir nachweisen, dass unser Konzept unter der Annahme sicherer Erwartungen zum üblichen Ergebnis führt und unter der Bedingung unsicherer Erwartungen mindestens für die Klasse der CARA-Nutzenfunktionen mit dem von *Kürsten* als entscheidungstheoretisch unhaltbar gebrandmarkten Vorgehen übereinstimmt.

2 Modellentwurf

Wir wollen unsere Überlegungen so einfach wie möglich präsentieren. Daher betrachten wir eine Bewertungssituation, in der es nur die Zeitpunkte $t = 0$ (Gegenwart) und $t = 1, 2$ (Zukunft) gibt.² Die Gegenwart ist sicher. Die zu bewertenden Cashflows des Unternehmens sind unsicher und erfolgen in den Zeitpunkten $t = 1, 2$. Wir werden sie mit dem Symbol \widetilde{CF}_1 und \widetilde{CF}_2 bezeichnen. Über die Zahl der unterscheidbaren Zustände, die in der Zukunft auftreten können, treffen wir vorerst keine Annahmen. Die einzelnen Zustände werden mit dem Buchstaben ω bezeichnet, wenngleich wir statt der ausführlichen Schreibweise $\widetilde{CF}_t(\omega)$ zumeist die Abkürzung \widetilde{CF}_t wählen werden.

¹Zum Konzept des Sicherheitsäquivalents unter der Voraussetzung, dass der Zeitaspekt keine Rolle spielt, siehe beispielsweise *Bamberg und Coenenberg* (2000), 89.

²Dass das Modell für Zwecke einer realen Unternehmensbewertung verallgemeinert werden muss, ist selbstverständlich.

Um eine rein subjektive Bewertung des Unternehmens vornehmen zu können, brauchen wir die Nutzenfunktion des Bewerter in Bezug auf die Cashflows des Unternehmens. Zu diesem Zweck orientieren wir uns zunächst einmal an einem Axiomensystem, aus dem in der Literatur³ typischerweise Nutzenfunktionen hergeleitet werden. Das ist das System von *von Neumann und Morgenstern*. In deren System müssen mehrere Voraussetzungen erfüllt sein.

1. Es wird die Existenz eines so genannten Mischungsraums (mixture space) unterstellt.

Um zu verstehen, was das bedeutet, braucht man den Begriff der Lotterie. Eine Lotterie, die einem Loskäufer im Zeitpunkt t die Zahlung X_t^1 mit der Wahrscheinlichkeit q und die Zahlung X_t^2 mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q$ verspricht, schreiben wir in der Form

$$\left[X_t^1, X_t^2 : q, 1 - q \right].$$

Falls ein Mischungsraum existiert, so heißt das: Wenn es im Zeitpunkt t die Zahlungen X_t^1 und X_t^2 gibt, so sind Lotterien mit den Zahlungen X_t^1 und X_t^2 im Zeitpunkt t für jede beliebige Wahrscheinlichkeit $q \in [0, 1]$ möglich.

2. Auf diesem Mischungsraum muss eine Präferenzrelation existieren. Diese Relation wird mit dem Symbol \succeq bezeichnet. $X_t^1 \succeq X_t^2$ bringt zum Ausdruck, dass der Bewerter die Zahlung X_t^1 höher oder ebenso schätzt wie die Zahlung X_t^2 .
3. Die Präferenzrelation muss eine Reihe von Eigenschaften erfüllen, damit eine repräsentative Darstellung durch eine Nutzenfunktion gelingt. Als notwendige Axiome verwendet man typischerweise Vergleichbarkeit, Transitivität, Stetigkeit und Dominanz.

Die Annahme des Mischungsraums wird im Zusammenhang mit der Bestimmung von Indifferenzwahrscheinlichkeiten benötigt. Unter der Voraussetzung $X_t^1 \succeq Z_t \succeq X_t^2$ nennt man q_z dann Indifferenzwahrscheinlichkeit, wenn die Zahlung Z_t für einen Entscheidungsträger dieselbe Attraktivität besitzt wie die Lotterie $\left[X_t^1, X_t^2 : q_z, 1 - q_z \right]$, wenn also für das betreffende Individuum

$$Z_t \sim \left[X_t^1, X_t^2 : q_z, 1 - q_z \right]$$

gilt. Es kann gezeigt werden, dass sich die Indifferenzwahrscheinlichkeiten als Nutzenwerte eignen. Sie bringen die Risikopräferenz des Entscheidungsträgers zum Ausdruck. Wir treffen hier eine wichtige Feststellung: Im Axiomensystem von *von Neumann und Morgenstern* beziehen sich alle Zahlungen auf ein und denselben Zeitpunkt t . Infolgedessen geht es bei den bisher angesprochenen Nutzenvorstellungen keinesfalls um Zeitpräferenzen.

Unter der Voraussetzung, dass für sämtliche Zahlungen derselbe Zahlungszeitpunkt relevant ist, lässt sich ein Sicherheitsäquivalent C_t als diejenige Zahlung definieren, die

³Siehe beispielsweise *Kruschwitz* (2002), 88 ff.

denselben Nutzen wie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung unsicherer Zahlungen im selben Zeitpunkt stiftet. Es liegt nahe, ein so definiertes Sicherheitsäquivalent als *Bernoulli-Äquivalent* C_t^B zu bezeichnen,

$$u(C_t^B) =_{\text{Def}} E[u(\widetilde{CF}_t)]. \quad (1)$$

Mit einer monotonen Nutzenfunktion gewinnt man daraus

$$C_t^B = u^{-1}(E[u(\widetilde{CF}_t)]).$$

Wenn wir uns auf *rein* subjektive Weise mit Unternehmensbewertung auseinandersetzen wollen, brauchen wir nun aber eine Nutzenfunktion, die sich auf mehrere Zeitpunkte bezieht, denn wir haben eine gegenwärtige sichere Zahlung mit unsicheren Cashflows in Verbindung zu bringen, die in späteren Jahren stattfinden werden. Wollen wir zugleich an der Axiomatik von *von Neumann und Morgenstern* festhalten, so müssen wir versuchen, den Mischungsraum in geeigneter Weise zu erweitern. *Kürsten* schlug in diesem Zusammenhang vor, das oben genannte Axiomensystem auf mehrattributive Ergebnisverteilungen anzuwenden. Unserer Ansicht nach führt dieser Weg ins Leere, denn die Existenz eines entsprechenden Mischungsraums würde Folgendes bedeuten: Falls es in den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ die Zahlungen X_0 und X_1 gibt, so sind Lotterien mit den Zahlungen X_0 und X_1 für jede beliebige Wahrscheinlichkeit $q \in [0, 1]$ möglich. Der Käufer des Lotterieloses⁴

$$[(X_0, 0), (0, X_1) : q, 1 - q]$$

erhält mit der Wahrscheinlichkeit q den Betrag X_0 im Zeitpunkt $t = 0$ oder mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q$ den Betrag X_1 im Zeitpunkt $t = 1$, eine bestimmt etwas ungewöhnliche Lotterie. Wollen wir aber die Theorie von *von Neumann und Morgenstern* auf unser Modell übertragen, so muss der Entscheider Präferenzen in Bezug auf eine derart merkwürdige Lotterie artikulieren können. Er muss Präferenzen über Lotterieresultate zum Ausdruck bringen, die – annahmegemäß – seiner Meinung nach gar nicht eintreten können: schließlich hatten wir vorausgesetzt, dass die Gegenwart sicher und gerade nicht unsicher ist. Der Entscheidungsträger muss also Präferenzen über Güterbündel bilden können, von denen wir annehmen, dass es sie gar nicht gibt. Als Ökonomen sollten wir (wie alle Wissenschaftler) sparsam mit den Annahmen umgehen, die wir treffen. Daher halten wir es für unangemessen, den Entscheidungsträger nach Präferenzen in Bezug auf Güterbündel zu fragen, die er gar nicht erreichen kann. Wir können uns nicht mit einem Modell anfreunden, bei dem die Unsicherheit in $t = 0$ bereits vollständig vorhanden ist und im Zeitablauf nicht mehr zunimmt.

Nun wollen wir uns aber nicht weiter mit der letztlich müßigen Frage plagen, ob es nicht doch Individuen mit derart bemerkenswerten Fähigkeiten hinsichtlich der Präferenzbildung gibt. Stattdessen gehen wir einen pragmatischen Weg und nehmen an, dass sich ein von *von Neumann und Morgenstern* abweichendes, aber dennoch akzeptables Axiomensystem formulieren lässt, aus dem die Existenz einer Nutzenfunktion des Typs

$$u(CF_0, \widetilde{CF}_1, \widetilde{CF}_2) = u(CF_0) + \delta_1 \cdot E[u(\widetilde{CF}_1)] + \delta_2 \cdot E[u(\widetilde{CF}_2)] \quad (2)$$

⁴Eine Zahlung wird hier durch einen zweidimensionalen Vektor beschrieben. Die erste Spalte des Vektors gibt die Zahlung im Zeitpunkt $t = 0$ an, die zweite Spalte gibt an, wie viel der Eigentümer in $t = 1$ erhält.

abgeleitet werden kann.⁵ In diesem Fall müsste die Form (2) als entscheidungstheoretisch fundiert angesehen werden.⁶ Dabei ist die Variable δ ein von den subjektiven Vorstellungen des Investors abhängiger Parameter, für den die Interpretation als Zeitpräferenzrate nahe liegt. Wollte man unter den jetzt getroffenen Annahmen ein Sicherheitsäquivalent definieren, so böte sich

$$u(C_0) =_{\text{Def}} u(CF_0) + \delta_1 \cdot E \left[u(\widetilde{CF}_1) \right] + \delta_2 \cdot E \left[u(\widetilde{CF}_2) \right] \quad (3)$$

an.

Um unser Konzept mit der Idee eines Kapitalmarktes zu verknüpfen, nehmen wir neben dem von uns nicht explizit formulierten Axiomensystem an, dass ein weiteres Axiom gelte. Wir unterstellen, dass ein unvollständiger Kapitalmarkt existiert.

Erwartungsnutzenaxiome ...

Kapitalmarktaxiom In den Zeitpunkten $t = 0, 1$ können Finanzmittel zum sicheren Zinssatz r_f angelegt beziehungsweise beschafft werden.

Diese Modellerweiterung veranlasst uns dazu, die Definitionsgleichung (3) anzupassen. Zu diesem Zweck beziehen wir Finanzmittel X_t und Y_t ein, die ein Kreditnehmer im Zeitpunkt t aufnimmt und im Zeitpunkt $t + 1$ unter Berücksichtigung von Zinsen wieder zurückzahlt. Solange X_t und Y_t noch nicht fixiert sind, lautet die erweiterte Definitionsgleichung für das Sicherheitsäquivalent

$$u(C_0 + Y_0) + \delta_1 \cdot E \left[u(Y_1 - (1 + r_f)Y_0) \right] + \delta_2 \cdot E \left[u(-(1 + r_f)Y_1) \right] =_{\text{Def}} \\ u(CF_0 + X_0) + \delta_1 \cdot E \left[u(\widetilde{CF}_1 + X_1 - (1 + r_f)X_0) \right] + \delta_2 \cdot E \left[u(\widetilde{CF}_2 - (1 + r_f)X_1) \right] \quad (4)$$

In dieser Formulierung ist das Sicherheitsäquivalent C_0 in vollkommen beliebiger Weise von den risikolosen Kreditbeträgen X_t und Y_t abhängig. Das kann schlecht akzeptiert werden. Natürlich wird ein rational handelndes Individuum nicht *irgendeine* Kreditaufnahme realisieren, sondern seine Politik *optimieren*. Er wird X_t und Y_t so wählen, dass beide Seiten der Gleichung so groß wie möglich werden.⁷ Bezeichnen wir mit X_t^* und Y_t^* jene Beträge, die die Maximierungsaufgabe lösen, und unterstellen wir, dass solche Lösungen stets existieren, so haben wir mit

$$u(C_0 + Y_0^*) + \delta_1 \cdot E \left[u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) \right] + \delta_2 \cdot E \left[u(-(1 + r_f)Y_1^*) \right] =_{\text{Def}} \\ u(CF_0 + X_0^*) + \delta_1 \cdot E \left[u(\widetilde{CF}_1 + X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) \right] + \delta_2 \cdot E \left[u(\widetilde{CF}_2 - (1 + r_f)X_1^*) \right] \quad (5)$$

endlich die Definition des Sicherheitsäquivalents im Rahmen unseres semi-subjektiven Modells gewonnen.

⁵Geeignet könnte das Axiomensystem von *Wakker* (1984) sein. Vergleiche dazu auch *Löffler* (2001), 39–43.

⁶*Kürsten* (2002), 139 f., betont mit weiteren Literaturverweisen die Einschränkungen der zulässigen Präferenzen, wenn man diese Struktur akzeptiert. Die funktionale Form der Gleichung (2) war übrigens nicht Gegenstand der Auseinandersetzung zwischen *Kürsten* (2002) und *Schwetzler* (2002), was unserem Pragmatismus eine gewisse Existenzberechtigung verleiht.

⁷Diese Definition des Sicherheitsäquivalents findet sich vermutlich auch bei *Wilhelm* (2002), 8, der allerdings ein Zwei-Zeitpunkte-Modell analysiert und nur das Endvermögen eines Investors maximiert. Inwieweit sein Zugang mit unserem Mehr-Perioden-Modell kompatibel ist, können wir daher nicht unmittelbar erkennen.

3 Bewertung im semi-subjektiven Modell

Die Stärke des semi-subjektiven Ansatzes besteht darin, dass er sowohl die individuelle Nutzeneinstellung eines Investors als auch die Gegebenheiten eines (unvollständigen) Kapitalmarktes berücksichtigt. Allerdings erzielen wir diesen Gewinn an ökonomischer Substanz nicht, ohne einen Preis zu bezahlen.

3.1 Sichere künftige Zahlungen

Niemand dürfte bestreiten wollen, dass sichere künftige Zahlungen mit dem risikolosen Zins zu diskontieren sind, wenn es einen Markt gibt, an dem risikolose Zahlungen dupliziert werden können. Jedoch ist eine solche fast trivial zu nennende Behauptung in unserer Modellwelt keinesfalls ganz selbstverständlich.

Auch die Bewertung sicherer Cashflows muss sich an der Definition des Sicherheitsäquivalents (5) orientieren. Und hier ist nicht einmal auf den zweiten Blick offensichtlich, dass sich als korrekter Diskontierungssatz der sichere Zins ergibt. Wir müssen vielmehr beweisen, dass dieses Resultat auch im semi-subjektiven Modell gilt. Zu diesem Zweck setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass $CF_0 = 0$ ist.⁸

Satz 1 *Für sichere zukünftige Cashflows fallen semi-subjektiver Ansatz und objektives Bewertungskonzept zusammen,*

$$C_0 = \frac{CF_1}{1 + r_f} + \frac{CF_2}{(1 + r_f)^2}.$$

Wir sind sicher, dass sich dieses Resultat auch in einem Modell mit mehr als drei Zeitpunkten ergibt, werden das aber nicht weiter verfolgen. Das Gleiche gilt für den Fall, dass auch gewisse unsichere Titel gehandelt werden: für jedes duplizierbare Asset werden semi-subjektiver Ansatz und objektives Bewertungskonzept das gleiche Ergebnis liefern. Unterstellen wir strikt konkave Nutzenfunktionen, so sind alle X_t^* und Y_t^* eindeutig. Nun wissen wir, dass Y_0^* und Y_1^* die linke Seite der Gleichung (5) maximieren. Mit der Substitution

$$\begin{aligned}\hat{Y}_0 &:= -\frac{CF_1}{1 + r_f} - \frac{CF_2}{(1 + r_f)^2} + X_0^*, \\ \hat{Y}_1 &:= -\frac{CF_2}{1 + r_f} + X_1^*\end{aligned}$$

stellt sich die rechte Seite wie folgt dar,

$$u\left(\frac{CF_1}{1 + r_f} + \frac{CF_2}{(1 + r_f)^2} + \hat{Y}_0\right) + \delta_1 \cdot E\left[u\left(\hat{Y}_1 - (1 + r_f)\hat{Y}_0\right)\right] + \delta_2 \cdot E\left[u\left(-(1 + r_f)\hat{Y}_1\right)\right].$$

Da voraussetzungsgemäß $CF_0 = 0$ ist, entspricht dies der optimalen Lösung der rechten Seite in (5) genau dann, wenn

$$C_0 = \frac{CF_1}{1 + r_f} + \frac{CF_2}{(1 + r_f)^2}$$

⁸Wilhelm hat in seiner Arbeit ein vergleichbares Resultat, er gestattet dort allerdings auch riskante Kapitalanlagen.

gilt. Die Optimierungsaufgaben der linken und rechten Seite können wegen der strikten Monotonie der Nutzenfunktion nur dann identische Werte liefern, wenn die Bewertung der sicheren Cashflows wie im Satz angegeben erfolgt.

3.2 Unsichere künftige Zahlungen

Jetzt geben wir die Annahme auf, dass die künftigen Cashflows sicher sind. Wir werden unter dieser Bedingung nicht zu dem Ergebnis des Satzes 1 kommen können. Jedoch wollen wir wissen, welches Verhältnis sich zwischen dem Sicherheitsäquivalent C_0 und den *Bernoulli*-Äquivalenten C_t^B einstellt. Zu diesem Zweck müssen wir konkrete Nutzenfunktionen betrachten.

3.2.1 CARA-Nutzenfunktionen

Wir konzentrieren uns auf Funktionen mit konstanter absoluter Risikoaversion,

$$u(t) = -e^{-at}. \quad (6)$$

Was können wir unter dieser Bedingung über den Zusammenhang zwischen dem Unternehmenswert C_0 und den *Bernoulli*-Äquivalenten sagen?⁹

Satz 2 *Bei einer Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion erweist sich das Sicherheitsäquivalent des semi-subjektiven Modells als Bernoulli-Äquivalent, das risikolos abzuzinsen ist,*

$$C_0 = \frac{C_1^B}{1 + r_f} + \frac{C_2^B}{(1 + r_f)^2}.$$

Um Satz 2 zu beweisen, bezeichnen wir mit X_t^* und Y_t^* wieder die optimalen Kredite in der Definitionsgleichung (5). Im ersten Schritt werden wir vier Hilfsgleichungen für die optimalen Werte der Kreditaufnahme des Investors herleiten. Wir werden ferner benutzen, dass die unterstellten CARA-Nutzenfunktionen für beliebige Zufallsvariablen \tilde{X} und \tilde{Y} der Eigenschaft

$$E \left[u(\tilde{X} + \tilde{Y}) \right] = E \left[u(\tilde{X}) \right] \cdot E \left[u(\tilde{Y}) \right] \quad (7)$$

genügen. Die zu maximierenden Ausdrücke in (5) haben mit $CF_0 = 0$ die Form

$$\begin{aligned} & u(C_0 + Y_0^*) + \delta_1 \cdot E \left[u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) \right] + \delta_2 \cdot E \left[u(-(1 + r_f)Y_1^*) \right] \\ & = u(X_0^*) + \delta_1 \cdot E \left[u(\tilde{CF}_1 + X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) \right] + \delta_2 \cdot E \left[u(\tilde{CF}_2 - (1 + r_f)X_1^*) \right], \end{aligned}$$

was sich unter Verwendung von (7) zu

$$\begin{aligned} & u(C_0 + Y_0^*) + \delta_1 \cdot E \left[u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) \right] + \delta_2 \cdot E \left[u(-(1 + r_f)Y_1^*) \right] \\ & = u(X_0^*) + \delta_1 \cdot E \left[u(\tilde{CF}_1) \right] \cdot E \left[u(X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) \right] \\ & \quad + \delta_2 \cdot E \left[u(\tilde{CF}_2) \right] \cdot E \left[u(-(1 + r_f)X_1^*) \right] \end{aligned}$$

⁹*Wilhelm* untersucht diese Fragestellung in seiner Arbeit nicht.

und unter Berücksichtigung von (1) zu

$$\begin{aligned} & u(C_0 + Y_0^*) + \delta_1 \cdot u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) + \delta_2 \cdot u(-(1 + r_f)Y_1^*) \\ & = u(X_0^*) + \delta_1 \cdot u(C_1^B) \cdot u(X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) + \delta_2 \cdot u(C_2^B) \cdot u(-(1 + r_f)X_1^*) \end{aligned} \quad (8)$$

vereinfachen lässt. Jetzt versuchen wir, die optimalen Werte X_t^* und Y_t^* zu bestimmen. Wir beginnen mit Y_0^* . Die Bedingungen erster Ordnung lauten

$$\begin{aligned} 0 &= u'(C_0 + Y_0^*) - \delta_1 (1 + r_f) u'(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) \\ u'(C_0 + Y_0^*) &= \delta_1 (1 + r_f) u'(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*). \end{aligned}$$

Wegen der speziellen Wahl der Nutzenfunktion gilt $u' = -a u$, woraus

$$u(C_0 + Y_0^*) = \delta_1 (1 + r_f) u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) \quad (9)$$

folgt. Analog ergibt sich

$$\delta_1 u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) = \delta_2 (1 + r_f) u(-(1 + r_f)Y_1^*). \quad (10)$$

Auf entsprechendem Weg erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= u'(X_0^*) - \delta_1 (1 + r_f) E \left[u'(\widetilde{CF}_1 + X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) \right] \\ u'(X_0^*) &= \delta_1 (1 + r_f) E \left[u'(\widetilde{CF}_1 + X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) \right] \\ u(X_0^*) &= \delta_1 (1 + r_f) E \left[u(\widetilde{CF}_1 + X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) \right] \\ u(X_0^*) &= \delta_1 (1 + r_f) E \left[u(\widetilde{CF}_1) \right] \cdot u(X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) \\ u(X_0^*) &= \delta_1 (1 + r_f) u(C_1^B) \cdot u(X_1^* - (1 + r_f)X_0^*). \end{aligned} \quad (11)$$

Zuletzt erhalten wir

$$u(C_1^B) \cdot u(X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) = \delta_2 (1 + r_f) u(C_2^B) \cdot u(-(1 + r_f)X_1^*) \quad (12)$$

Wir setzen nun (9) bis (12) in (8) derart ein, dass nur die Summanden $u(X_0^*)$ und $u(C_0 + Y_0^*)$ verbleiben. Es ergibt sich

$$\left(1 + \frac{1}{1 + r_f} + \frac{1}{(1 + r_f)^2} \right) u(X_0^*) = \left(1 + \frac{1}{1 + r_f} + \frac{1}{(1 + r_f)^2} \right) u(C_0 + Y_0^*),$$

woraus unmittelbar

$$u(X_0^*) = u(C_0 + Y_0^*)$$

oder wegen der strikten Monotonie

$$\begin{aligned} X_0^* &= C_0 + Y_0^* \\ X_0^* - Y_0^* &= C_0 \end{aligned} \quad (13)$$

folgt. Wir setzen jetzt (9) bis (12) in (8) derart ein, dass nur die Summanden $u(X_1^* - (1 + r_f)X_0^*)$ und $u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*)$ verbleiben. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left(1 + r_f + 1 + \frac{1}{1 + r_f}\right) \delta_1 u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) \\ &= \left(1 + r_f + 1 + \frac{1}{1 + r_f}\right) \delta_1 u(C_1^B) \cdot u(X_1^* - (1 + r_f)X_0^*) \end{aligned}$$

oder wegen der durch Gleichung (7) beschriebenen Eigenschaft der Nutzenfunktion

$$u(Y_1^* - (1 + r_f)Y_0^*) = u(C_1^B + X_1^* - (1 + r_f)X_0^*).$$

Daraus folgt

$$\frac{Y_1^* - X_1^*}{1 + r_f} - (Y_0^* - X_0^*) = \frac{C_1^B}{1 + r_f}. \quad (14)$$

Wir setzen zuletzt (9) bis (12) in (8) derart ein, dass nur die Summanden $u(-(1 + r_f)X_1^*)$ und $u(-(1 + r_f)Y_1^*)$ verbleiben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \left((1 + r_f)^2 + 1 + r_f + 1\right) \delta_2 u(-(1 + r_f)Y_1^*) \\ &= \left((1 + r_f)^2 + 1 + r_f + 1\right) \delta_2 u(C_2^B) \cdot u(-(1 + r_f)X_1^*) \end{aligned}$$

oder wegen der durch Gleichung (7) beschriebenen Eigenschaft der Nutzenfunktion

$$u(-(1 + r_f)Y_1^*) = u(C_2^B - (1 + r_f)X_1^*).$$

Daraus folgt wegen Monotonie

$$X_1^* - Y_1^* = \frac{C_2^B}{1 + r_f} \quad (15)$$

und damit ist der Beweis erbracht: die Gleichungen (13) bis (15) ergeben die Behauptung des Satzes. Unser Beweisweg verdeutlicht, dass die Aussage auch dann richtig bliebe, wenn wir mehr als zwei Perioden zu betrachten hätten.

3.2.2 Logarithmische Nutzenfunktion

Wir vermuten, dass der im Satz 2 erwähnte Zusammenhang nur für den Fall der CARA-Nutzenfunktion gültig ist. Jedenfalls ist das Sicherheitsäquivalent des semi-subjektiven Ansatzes nicht mit dem risikolos diskontierten *Bernoulli*-Äquivalent identisch, wenn man mit einer logarithmischen Nutzenfunktion

$$u(t) = \ln(t) \quad (16)$$

arbeitet. Da die Rechnungen im allgemeinen Fall leider sehr aufwendig sind, nehmen wir eine weitere Spezialisierung unseres Modells vor, indem wir annehmen, dass in der Zukunft nur ein Zeitpunkt $t = 1$ und nur zwei Zustände ω_1 und ω_2 möglich sind. Beide

Zustände seien gleich wahrscheinlich. Gleichung (5) nimmt in diesem besonderen Fall mit $CF_0 = 0$ die Form

$$\begin{aligned} & \ln(C_0 + Y_0^*) + \delta \ln(-(1 + r_f)Y_0^*) \\ &= \ln(X_0^*) + \frac{\delta}{2} \left(\ln(CF_1(\omega_1) - (1 + r_f)X_0^*) + \ln(CF_1(\omega_2) - (1 + r_f)X_0^*) \right). \end{aligned}$$

an. Der optimale Betrag Y_0^* lässt sich leicht bestimmen. Die Bedingung erster Ordnung lautet

$$0 = \frac{1}{C_0 + Y_0^*} + \frac{\delta}{Y_0^*} \implies Y_0^* = -\frac{C_0}{1 + \frac{1}{\delta}}.$$

Um X_0^* zu gewinnen, müssen wir die Bedingung erster Ordnung auf der rechten Seite betrachten,

$$0 = \frac{1}{X_0^*} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{-(1 + r_f)}{CF_1(\omega_1) - (1 + r_f)X_0^*} + \frac{-(1 + r_f)}{CF_1(\omega_2) - (1 + r_f)X_0^*} \right).$$

Mühsame algebraische Umformungen führen auf die folgende Lösung

$$\begin{aligned} X_0^* = & \frac{2 + \delta}{4(1 + r_f)(1 + \delta)} \left(CF_1(\omega_1) + CF_1(\omega_2) \right. \\ & \left. \pm \sqrt{CF_1^2(\omega_1) + CF_1^2(\omega_2) + 2CF_1(\omega_1)CF_1(\omega_2) \frac{\delta^2 - 4\delta - 4}{\delta^2 + 4\delta + 4}} \right) \end{aligned}$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $CF_1(\omega_1) \leq CF_1(\omega_2)$. Man kann sich klar machen, dass X_0^* dann zwischen $\frac{CF_1(\omega_1)}{1+r_f}$ und $\frac{CF_1(\omega_2)}{1+r_f}$ liegen muss. Damit kommt als Lösung der quadratischen Gleichung nur der Ausdruck mit negativem Vorzeichen vor dem Wurzelzeichen in Frage. Wir haben diese Optimalwerte nun in die Bestimmungsgleichung für das Sicherheitsäquivalent C_0 eingesetzt und erhielten auf diese Weise endlich eine unübersichtliche Gleichung für C_0 , die wir numerisch lösten. Im Vergleich dazu haben wir das *Bernoulli*-Äquivalent mit

$$C_1^B = \sqrt{CF_1(\omega_1) CF_1(\omega_2)}$$

ermittelt.

Um zu zeigen, dass Satz 2 bei Verwendung einer logarithmischen Nutzenfunktion tatsächlich nicht gilt, betrachten wir ein Beispiel. Zu diesem Zweck wählen wir $CF_1(\omega_1) = 1$, $r_f = 5\%$ und $\delta = 0.95$. Variieren wir nun $CF_1(\omega_2)$ systematisch im Intervall $(1, 7]$ und berechnen auf dieser Grundlage die risikolos diskontierten *Bernoulli*-Äquivalente sowie das semi-subjektive Sicherheitsäquivalent, so ergibt sich das in Abbildung 1 dargestellte Bild. Das semi-subjektive Äquivalent ist stets kleiner als das diskontierte *Bernoulli*-Äquivalent. Die Abweichung ist um so größer, je höher die Volatilität ist.

4 Ergebnis

Bei einer Erwartungsnutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion ergibt sich im semi-subjektiven Modell, dass der Unternehmenswert dem risikolos diskontierten *Ber-*

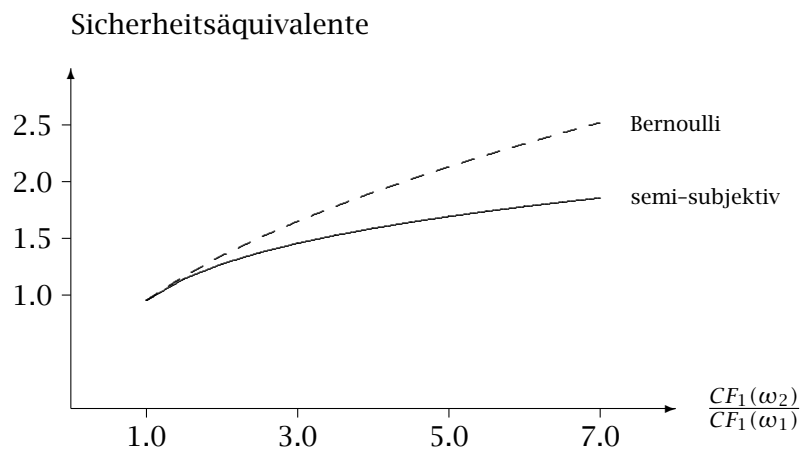


Abbildung 1: Risikolos diskontiertes *Bernoulli*-Äquivalent und semi-subjektives Äquivalent in Abhängigkeit von der Volatilität (mit $r_f = 5\%$, $\delta = 0.95$)

noulli-Äquivalent entspricht. Die von *Schwetzler* und anderen favorisierte Rechenvorschrift findet unter diesen Bedingungen ihre ökonomische Rechtfertigung. Ein entsprechender Versuch misslingt jedoch, wenn stattdessen eine logarithmische Nutzenfunktion zugrunde gelegt wird.

Literatur

Bamberg, Günter und Coenenberg, Adolf Gerhard (2000) *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*, 10. Auflage, Vahlen, München.

Kruschwitz, Lutz (2002) *Finanzierung und Investition*, 3. Auflage, Oldenbourg, München, Wien.

Kürsten, Wolfgang (2002) "‘Unternehmensbewertung unter Unsicherheit’, oder: Theorie-defizit einer künstlichen Diskussion über Sicherheitsäquivalent- und Risikozuschlagsmethode. – Anmerkungen (nicht nur) zu dem Beitrag von Bernhard Schwetzler in der zfbf", *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 54, 128–144.

Löffler, Andreas (2001) *Ein Paradox der Portfoliotheorie und vermögensabhängige Nutzenfunktion*. Mikroökonomische Fundierung, Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.

von Neumann, John und Morgenstern, Oskar (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Schwetzler, Bernhard (2002) "Das Ende des Ertragswertverfahrens? Replik zu den Anmerkungen von Wolfgang Kürsten zu meinem Beitrag in der zfbf", *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 54, 145–158.

Wakker, Peter P. (1984) "Cardinal coordinate independence for expected utility", *Journal of Mathematical Psychology*, 28, 110–117.

Wilhelm, Jochen (2002) *Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien – Finanzierungstheoretische Anmerkungen zu einem Grundproblem der Unternehmensbewertung*, Passauer Diskussionspapiere, Diskussionsbeitrag Nr. B-9-02, Universität Passau, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät.

Pensionsrückstellungen und Unternehmensbewertung

Workshop Universität Hannover
8.6.2002

Prof. Dr. Bernhard Schwetzler
Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken
Handelshochschule Leipzig (HHL)

1. Modellüberblick

→ 1.1. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

1.2. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

2.1. Die Vorgehensweise

2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR

3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$

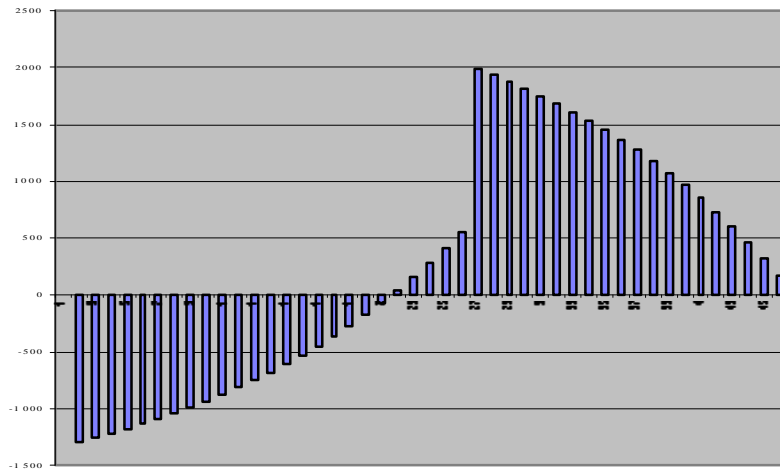
4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

Variante A: Verdrängungsmodell

Zuführung PR verdrängt Fremdkapital

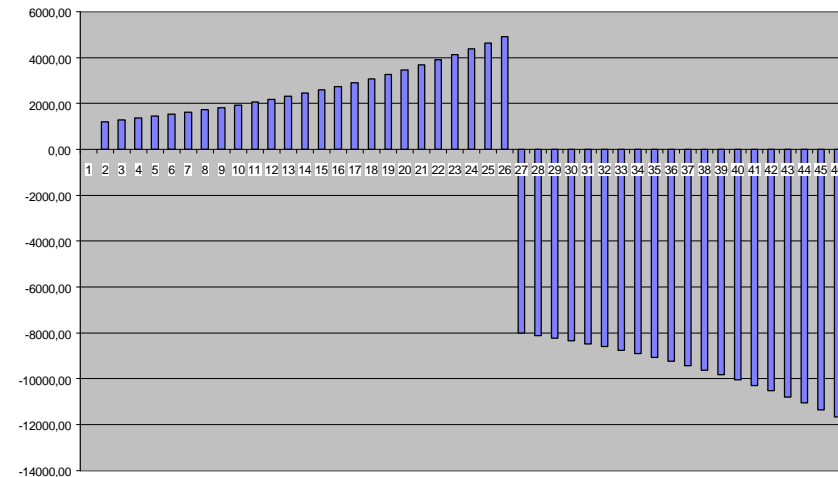
Gesamte Zahlungswirkung (q=0%)



Variante B: Ausschüttungsmodell

Zuführung PR wird ausgeschüttet

Zahlungseffekt bei Ausschüttung



- Vorteile PR: Nettozinsersparnis auf verdrängtes Fremdkapital $PR_{t-1}i_V(1-s_U)$
- Nachteile PR: Ausschüttungsverzicht AE für Zuführung PR $(J_t + i_{PR}PR_{t-1})(1-s_U)$
- Kosten PR: belastungsäquivalenter Fremdkapitalkostensatz

- Vorteile PR: Liquiditätszuwachs durch Steuerersparnis auf ZPR $(J_t + i_{PR}PR_{t-1})s_U$
- Nachteile PR: Rentenzahlung brutto R_t
- Kosten PR: interner Zinsfuß

in Standard- WACC für PR eingesetzt

1. Modellüberblick

1.1. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

→ **1.2. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen**

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

2.1. Die Vorgehensweise

2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR

3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$

4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

DCF-Bewertungen und Pensionsrückstellungen – Modellüberblick

	<u>Separate Erfassung des Wertbeitrages</u>		<u>Keine separate Erfassung des Wertbeitrages</u>		
			WACC-Modell		
			Brutto-Ansatz	Netto-Ansatz	Rollback-Modell
Modellannahmen	Verdrängung FK	Ausschüttung an AE	Ausschüttung an AE	Ausschüttung an AE	Ausschüttg. an AE
Effekte PR	+ : Zinersparnis auf abgelöstes FK - : Ausschüttungsverzicht durch Zuführung PR	+ : Steuerersparnis auf Zuführung PR - : Rentenzahlungen brutto	_____	_____	_____
Modellbestandteile	Unternehmenswert ohne PR + Werteffekt PR	Unternehmenswert ohne PR + Werteffekt PR	Cash flow <u>vor</u> Finanzierungseffekten PR PR in WACC einbezogen Abzug Wert PR vom Firm Value	Cash flow <u>nach</u> Finanzierungseffekten PR keine Einbeziehung in WACC kein Abzug Wert PR vom Firm Value	wie Brutto-Ansatz, aber mit Anpassung der Kapitalkosten
Modelle zur UB	Drukarczyk (1998) Richter (1996)	Löffler (1998) Drukarczyk/ Schüler (2000)	Hachmeister (1999) Mandl/ Rabel (1997) Kinski (2000)	Bühner (1990)	Drukarczyk/ Schüler (2000)

1. Modellüberblick

- 1.1. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen
- 1.2. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

→ 2.1. Die Vorgehensweise

- 2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

- 3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR
- 3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

- 4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$
- 4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

Ergebnis

- ① Ermittlung Unternehmenswert bei Eigenfinanzierung (ohne Berücksichtigung der Effekte aus der Pensionszusage)
- ② Ermittlung des Tax Shield auf das gesamte Fremdkapital des Unternehmens $F_t^* = F_t + PR_t \quad \forall t$
 PR_t wird behandelt wie verzinsliches Fremdkapital
 es gilt $F_t^* \geq PR_t$

$$V_0^E = \sum_{t=1}^{\infty} \bar{X}_t \cdot (1 - s_u)(1 + k_s)^{-t}$$

$$+ V_0^{USt,F^*} = \sum_{t=1}^{\infty} (F_{t-1} + PR_{t-1}) \cdot i_v \cdot s_u (1 + i)^{-t}$$

- ③ Ermittlung des relativen Vor-/ Nachteils von Pensionsrückstellungen gegenüber Fremdkapital

$$= V_0^{F^*}$$

$$+ \Delta V_0^{PR} = \sum_{t=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} PR_{t-1} \cdot (i_v - i_{PR})(1 - s_u) \\ - (1 - q)J_t \cdot (1 - s_u) \end{array} \right] (1 + i)^{-t}$$

- ④ Abzug des gesamten Fremdkapitalbestandes $F_0 + PR_0^*$

$$= V_0^{F,PR}$$

$$- F_0 - PR_0$$

$$= E_0$$

* Abzug von PR_0 zum Nominalwert

1. Modellüberblick

- 1.1. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen
- 1.2. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

2.1. Die Vorgehensweise

- **2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells**

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

- 3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR
- 3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

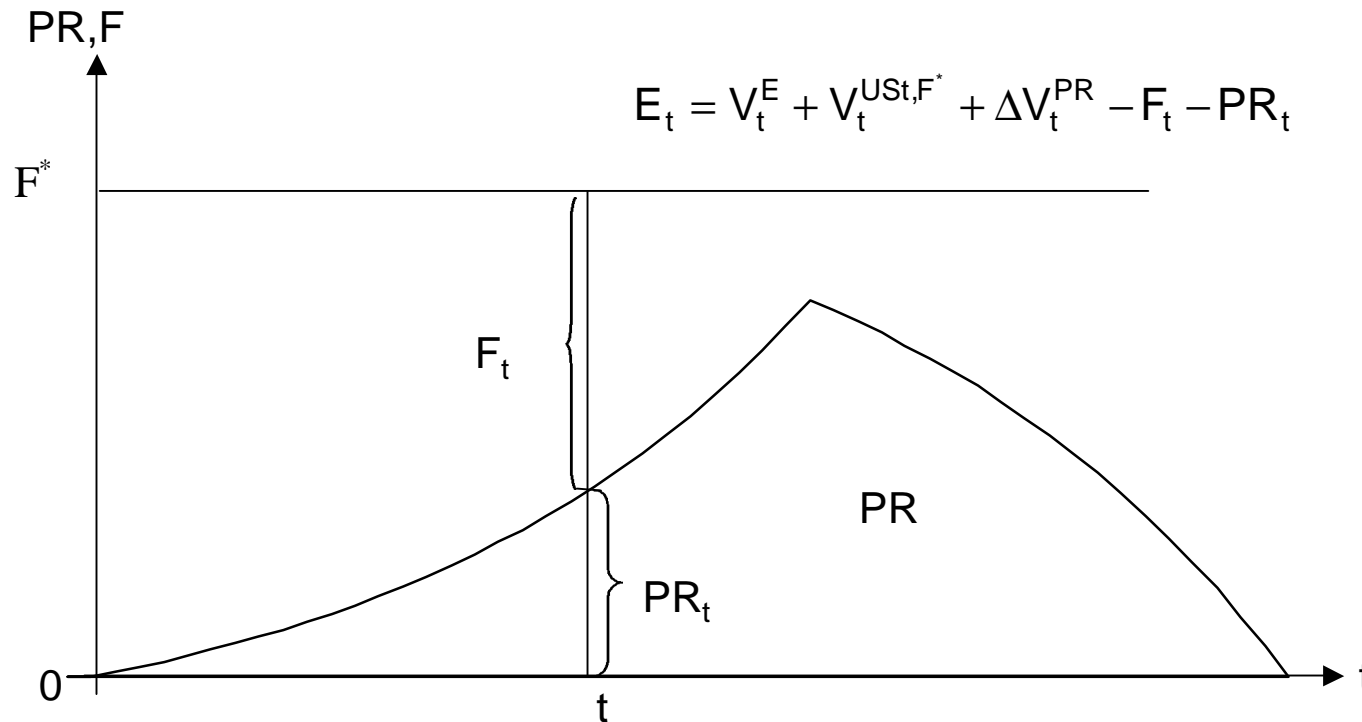
4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

- 4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$
- 4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

Das Vorgehen erfordert zuerst die Vorgabe des gesamten künftigen Fremdkapitalbestandes $F^* = F + PR$

- Fall ① volle Verdrängung FK: Schritt (1) Vorgabe gesamter Fremdkapitalbestand $F^* = F + PR$
 Schritt (2) Verdrängung von F durch PR



Zeitpunkt 0: PR = 0

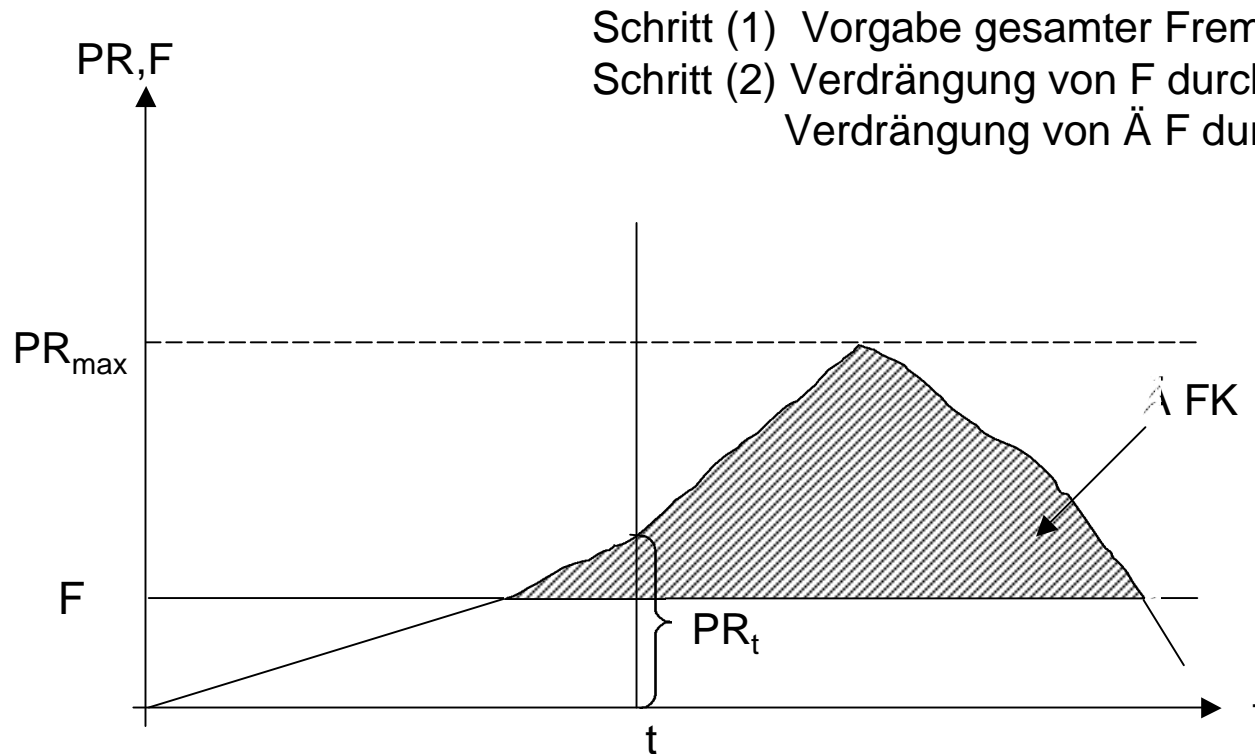
Zeitpunkt t: PR > 0

- Wert bei EF: ohne Wirkungen der Pensionszusage
- Tax shield: auf Basis gesamtes FK F^*
- Effekt PR: ΔV_0^{PR} relativ zu Fremdkapital

- Wert bei EF: ohne Wirkungen der Pensionszusage
- Tax shield: auf der Basis von $F_t + PR_t = F^*$
 \Rightarrow ersetzen PR_t durch FK in gleichem Umfang
- Effekt PR: ΔV_0^{PR} relativ zu Fremdkapital

Das Vorgehen erfordert zuerst die Vorgabe des gesamten künftigen Fremdkapitalbestandes F^*

Fall ②: teilweise Verdrängung, teilweise Ausschüttung



Schritt (1) Vorgabe gesamter Fremdkapitalbestand $F^* = F + PR$

Schritt (2) Verdrängung von F durch PR

Verdrängung von ΔF durch $PR =$ Ausschüttung

Zeitpunkt 0: $PR = 0; F = F^*$

- Wert bei EF: ohne Wirkungen Pensionszusage
- Tax shield:
 - auf Basis von F^* (dauerhaft)
 - zusätzlich Tax shield von ΔFK
- Effekt PR: ΔV_0^{PR} relativ zu Fremdkapital

Zeitpunkt t: $PR > 0; F = 0; PR = F^*$

- Wert bei EF: ohne Wirkungen Pensionszusage
- Tax shield:
 - auf Basis von F^* (dauerhaft)
 - zusätzlich Tax shield v. restlichem ΔFK
- Effekt PR: ΔV_0^{PR} relativ zu Fremdkapital

Das Verdrängungs- und das Ausschüttungsmodell sind zwei Spezialfälle dieses Bewertungsansatzes

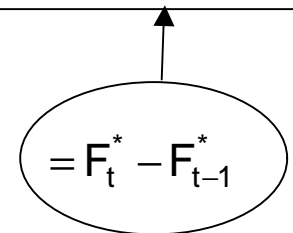
Cash flow bei Eigenfinanzierung		$\bar{X}_t \cdot (1 - s_u)$
Nettozinszahlungen auf F_{t-1}^*	-	$(F_{t-1} + PR_{t-1}) \cdot i_v \cdot (1 - s_u)$
relativer Vorteil Netto-Zinsen	+	$PR_{t-1} (i_v - i_{PR}) (1 - s_u)$
relativer Nachteil nicht verdrängter Lohn	-	$(1 - q) J_t \cdot (1 - s_u)$
Veränderung Fremdkapital	+	$F_t - F_{t-1}$
Veränderung Pensionsrückstellungen $PR_t - PR_{t-1}$	+	$J_t + PR_{t-1} \cdot i_{PR} - R_t$
Free Cash flow to Equity		$CF_t^{FTE} = \bar{X}_t (1 - s_u) - F_{t-1} i_v (1 - s_u) - PR_{t-1} i_{PR} (1 - s_u) - (1 - q) J_t \cdot (1 - s) (1 + i)^{-t} + F_t - F_{t-1} + J_t + PR_{t-1} i_{PR} - R_t$

Spezialfall I volle Verdrängung: $F_t^* - F_{t-1}^* = 0$ $F_t - F_{t-1} = J_t + PR_{t-1} i_{PR} - R_t$

Keine Cash flow - Wirkung

Spezialfall II volle Ausschüttung: $F_t - F_{t-1} = 0$ $F_t^* - F_{t-1}^* = J_t + PR_{t-1} i_{PR} - R_t$

Volle Cash flow - Wirkung



1. Modellüberblick

- 1.1. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen
- 1.2. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

- 2.1. Die Vorgehensweise
- 2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

- 3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR
- 3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

- 4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$
- 4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

Steuersystem I Unternehmenssteuersatz s

a) Ausschüttungskürzung durch Zuführung zur Rückstellung	$-(J_t + i_{PR} \cdot PR_{t-1}) \cdot (1 - s_u)$
b) Nettozinersparnis auf abgelöstes Fremdkapital	$+ PR_{t-1} \cdot i_V \cdot (1 - s_u)$
c) Netto-Ersparnis an „verdrängtem“ Lohn	$q \cdot J_t (1 - s_u)$
<hr/>	
gesamte periodische Ausschüttungswirkung	$- J_t \cdot (1 - q)(1 - s_u)$ $+ PR_{t-1} \cdot [i_V - i_{PR}](1 - s_u)$

Steuersystem V Halbeinkünfteverfahren

a)	Ausschüttungskürzung durch Zuführung zur Rückstellung	$-(J_t + i_{PR} \cdot PR_{t-1}) \cdot (1 - s_{GE})(1 - s_K)(1 - 0,5 s_I)$
b)	Nettozinersparnis auf abge- löstes Fremdkapital	$+ PR_{t-1} \cdot i_V \cdot (1 - 0,5 \cdot s_{GE})(1 - s_K)(1 - 0,5 s_I)$
c)	Netto-Ersparnis an „verdrängtem“ Lohn	$q \cdot J_t (1 + 0,5 a_{SV})(1 - s_{GE})(1 - s_K)(1 - 0,5 s_I)$
<hr/>		
	gesamte periodische Ausschüttungswirkung	$- J_t [1 - q(1 + 0,5 a_{SV})](1 - s_{GE})(1 - s_K)(1 - 0,5 s_I)$ $+ PR_{t-1} \cdot [i_V \cdot (1 - 0,5 \cdot s_{GE}) - i_{PR} \cdot (1 - s_{GE})](1 - s_K)(1 - 0,5 s_I)$
	mit a_{SV} %-Satz Sozialabgaben	

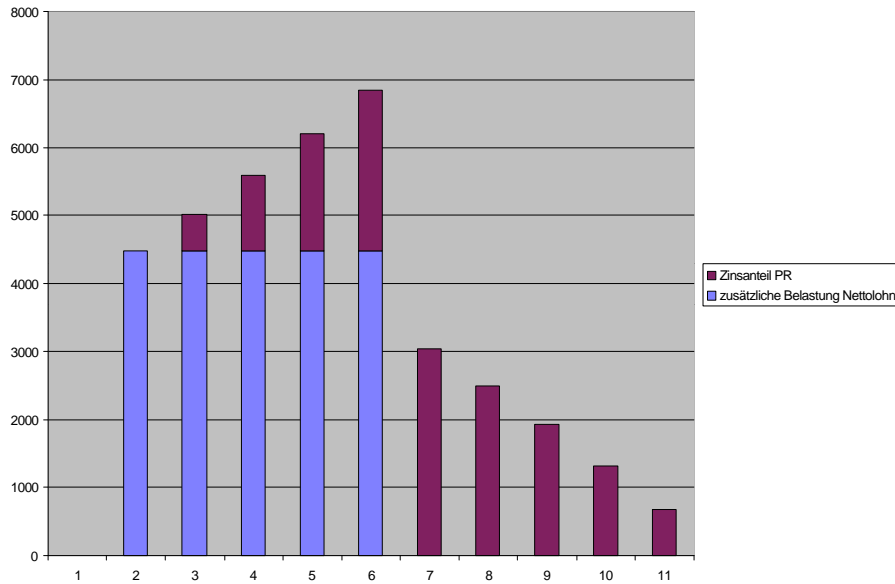
Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen – Ermittlung des Gesamteffektes

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rentenzahlung Mitarbeiter		0	0	0	0	0	12000	12000	12000	12000	12000
Gleichbleibende Jahresbeträge	8967,10	8967,10	8967,10	8967,10	8967,10	8967,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Bestand Rückstellung		8967,10	18472,22	28547,65	39227,61	50548,37	41581,27	32076,14	22000,71	11320,75	0,00
Zinsanteil		0,00	538,03	1108,33	1712,86	2353,66	3032,90	2494,88	1924,57	1320,04	679,25
Gesamte Zuführung		8967,10	9505,12	10075,43	10679,96	11320,75	3032,90	2494,88	1924,57	1320,04	679,25
Verdrängungsrate Lohn	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
Nicht verdrängter Bruttolohn		-4483,55	-4483,55	-4483,55	-4483,55	-4483,55	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Zinsanteil PR		0,00	-538,03	-1108,33	-1712,86	-2353,66	-3032,90	-2494,88	-1924,57	-1320,04	-679,25
Nachteile Netto		-1793,42	-2008,63	-2236,75	-2478,56	-2734,88	-1213,16	-997,95	-769,83	-528,02	-271,70
Zinssatz abgelöstes Fremdkapital	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%
Zins-Ersparnis brutto		0,00	717,37	1477,78	2283,81	3138,21	4043,87	3326,50	2566,09	1760,06	905,66
Zins-Ersparnis Netto		0,00	286,95	591,11	913,52	1255,28	1617,55	1330,60	1026,44	704,02	362,26
Gesamte Zahlungswirkung PR		-1793,42	-1721,68	-1645,64	-1565,04	-1479,60	404,39	332,65	256,61	176,01	90,57
Kalkulationszinsfuß		8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%	8,00%
Gesamteffekt	-5882,78	-4559,98	-3203,10	-1813,70	-393,76	1054,34	734,30	460,39	240,61	83,86	0,00

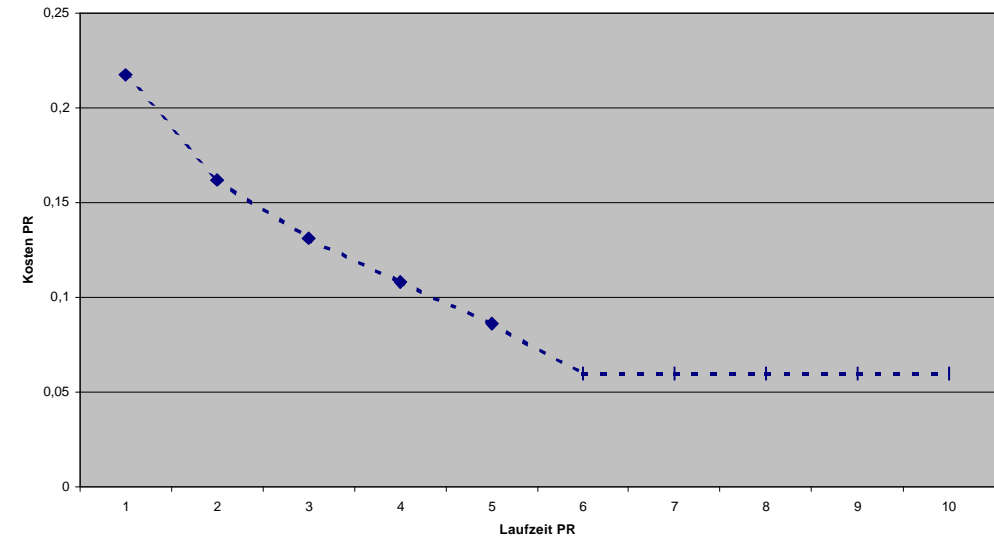
Beispiel: Ermittlung des Gesamteffektes für $q = 50\%$ und $s_U = 60\%$ im Steuersystem I
hier: Diskontierungszinsfuß = Bruttozinssatz Fremdkapital (Steuersystem I)

Kosten von Pensionsrückstellungen: nicht verdrängter Lohn (Disagio) und Zinsanteil PR als Komponenten

Zeitliche Entwicklung der Kostenkomponenten



Kosten Pensionsrückstellungen im Zeitablauf (q = 50%)



$q < 100\%$: jede zusätzliche Kreditaufnahme in Höhe von J_t verursacht zusätzliche Kosten in Höhe von $J_t (1-q) (1 - s_U) \Rightarrow$ Disagio auf den zusätzlichen Kredit J_t

Kosten Anwartschaftsphase

$J_t (1-q)(1-s_U)$ Disagio auf zusätzliche Kreditaufnahme
 $i_{PR} PR_{t-1} (1-s_U)$ Zinsanteil auf Bestand PR

Kosten Rentenphase

$i_{PR} PR_{t-1} (1-s_U)$ Zinsanteil auf Bestand PR

i_v^* sinkt mit zunehmender Lebensdauer

1. Modellüberblick

- 1.1. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen
- 1.2. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

- 2.1. Die Vorgehensweise
- 2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

- 3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR

→ 3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

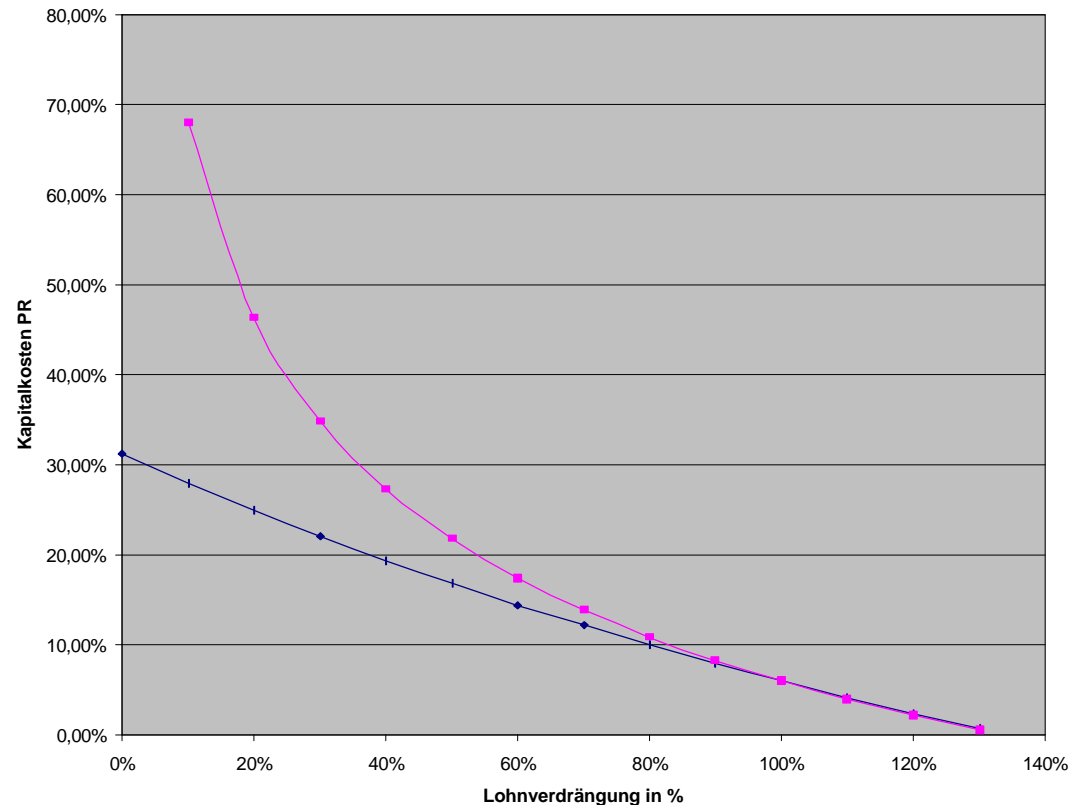
4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

- 4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$
- 4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

Kosten von Pensionsrückstellungen - der Einfluss der Lohn-Verdrängungsrate q

Lohnverdrängungsrate und Kapitalkosten PR



PR (A): Diskontierungszinsfuß
= Nettozinssatz

PR (B): Diskontierungszinsfuß
= Bruttozinssatz

Die Lohnverdrängungsrate q (bezogen auf den gleichbleibenden Jahresbetrag J_t) bestimmt die Höhe des Disagios bei der zusätzlichen Kreditaufnahme in Höhe von J_t .
Bei einer Verdrängungsrate von 100% entsprechen im einfachen Steuermodell die Kosten der Pensionsrückstellungen genau dem Zinsanteil von 6% auf den Altbestand der Pensionsrückstellungen.

Die kritische Lohnverdrängungsquote q^* kann über die Indifferenz der Arbeitnehmer abgeleitet werden

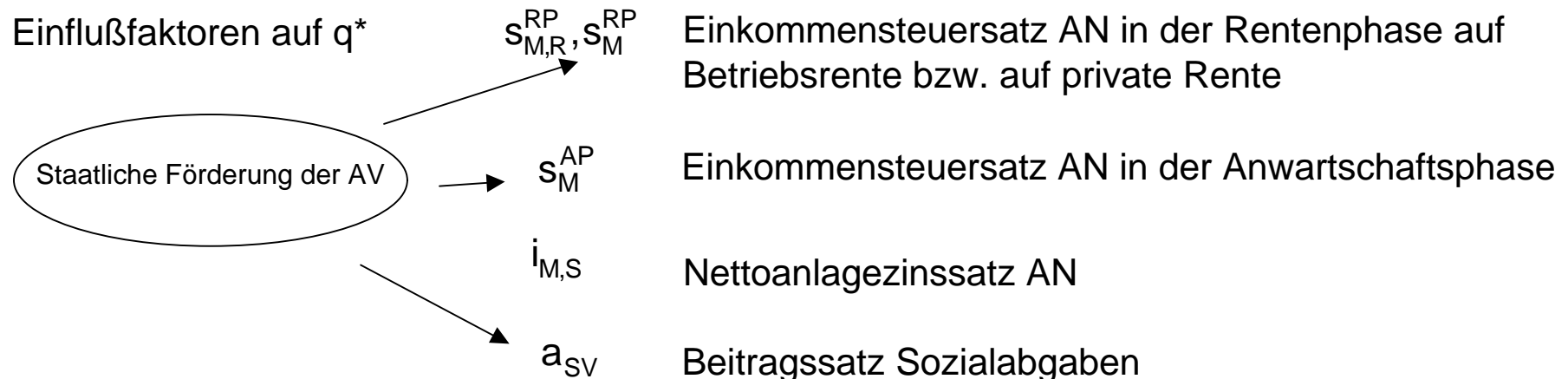
Dazu muß gelten*:

$$J_t q (1 - 0,5a_{SV}) (1 - s_M^{AP}) \frac{(1 + i_{M,S})^m - 1}{i_{M,S}} \frac{(1 + i_{M,S})^n i_{M,S}}{(1 + i_{M,S})^n - 1} (1 - s_M^{RP}) = J_t \frac{(1 + i_{PR})^m - 1}{i_{PR}} \frac{(1 + i_{PR})^n i_{PR}}{(1 + i_{PR})^n - 1} (1 - s_{M,R}^{RP})$$

$$= R_t (1 - s_{M,R}^{RP})$$

Nettorente AN bei Selbstanlage des Verdrängten Lohnanteils nach Steuern

Nettorente AN bei Erhalt der Betriebsrente



* Dirrigl (1997); Kinski (2000)

1. Modellüberblick

- 1.1. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen
- 1.2. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

- 2.1. Die Vorgehensweise
- 2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

- 3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR
- 3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

- 4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$
- 4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

Modellvergleich: Spezialfall $q = 100\%$; $i_V = i_{PR}$

$$q=100\%; i = i_{PR}$$



$$\Delta V_t^{PR} = 0 \quad \forall t$$

Ausschüttungsfall: $F_t = 0; PR_t = F_t^* \forall t$

Bewertungsformel

Anmerkungen

	Bewertungsformel	Anmerkungen
APV-Kombinationsmodell	$E_0 = V_0^E + V_0^{USt,F^*} + \Delta V_0^{PR} - F_0 - PR_0$ $E_0 = V_0^E + V_0^{USt,PR} - PR_0$	PR_0 : Buchwert PR = Marktwert ausstehender AN-Kredit.
Ausschüttungsmodell	$E_0 = V_0^E + V_0^R - FR_0$ $V_0^R = s_U \sum_{t=1}^{\infty} ((1-q)J_t + PR_{t-1}i_{PR})(1+i)^{-t}$ $FR_0 = \sum_{t=1}^{\infty} R_t(1+i)^{-t} \quad \begin{array}{l} \text{Marktwert} \\ \text{Rentenzahlungen} \end{array}$	$q=100\%; i = i_{PR}$ $V_0^R = s_U \sum_{t=1}^{\infty} PR_{t-1}i_{PR}(1+i)^{-t} = V_0^{USt,PR}$ Abzug von PR_0 statt von FR_0
Entity-WACC-Modell Brutto-Ansatz	$E_0 = V_0^F - PR_0$ $V_0^F = \sum_{t=1}^{\infty} \bar{X}_t \cdot (1-s_U)(1+WACC_{t,S})^{-t}$ $WACC_{S,t} = \frac{E_t}{V_t^F} k_S^F + i_{PR}(1-s_U) \frac{PR_t}{V_t^F}$	PR_0 : Marktwert AN-Kredit. Zirkularitätsproblem bei veränderlichem PR-Bestand

1. Modellüberblick

- 1.1. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen
- 1.2. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

- 2.1. Die Vorgehensweise
- 2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

- 3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR
- 3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$

→ 4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

Modellvergleich: für den Fall $q < 100\%$; $i_v > i_{PR}$ sind im Ausschüttungsmodell die Zinersparnisse zusätzlich zu berücksichtigen

Ausschüttungsfall: $F_t = 0; PR_t = F_t^* \forall t$

APV-Kombinationsmodell	Ausschüttungsmodell
$E_0 = V_0^E + V_0^{USt,PR} - PR_0$	$E_0 = V_0^E + V_0^R - FR_0$
<p>Tax Shield auf $F^* = PR$ V_0^{USt,F^*}</p> $\sum_{t=1}^{\infty} PR_{t-1} \cdot i_v \cdot s_u (1+i)^{-t}$	<p>V_0^R $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^{\infty} s_u PR_{t-1} i_{PR} (1+i)^{-t} \\ \sum_{t=1}^{\infty} (1-q) J_t \cdot s_u (1+i)^{-t} \end{array} \right.$</p> <p style="text-align: right;">Steuerersparnis auf Zinsanteil PR Steuerersparnis auf Zusätzlichen Lohnanteil</p>
<p>Rel. Vor-/Nachteil geg. Fremdkapital ΔV_0^{PR}</p> $\sum_{t=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} PR_{t-1} \cdot (i_v - i_{PR})(1 - s_u) \\ - (1-q) J_t \cdot (1 - s_u) \end{array} \right] (1+i)^{-t}$	<p>FR_0 $\sum_{t=1}^{\infty} (1-q) J_t (1+i)^{-t}$</p> <p style="text-align: right;">Zusätzliche Belastung aus PR</p>

Differenz:
$$\sum_{t=1}^{\infty} [PR_{t-1} \cdot (i_v - i_{PR})] (1+i)^{-t}$$

Wenn in beiden Modellen der aktuelle Bestand PR_0 von Firm Value abgezogen werden soll: Bruttozinersparnis ist beim Ausschüttungsmodell separat und zusätzlich zu berücksichtigen

Modellvergleich: für den Fall $i_V > i_{PR}$ ergeben sich im WACC-Ansatz Probleme aus der zeitlichen Verteilung der PR-Kosten

Abbildung der Zahlungswirkungen von Pensionsrückstellungen

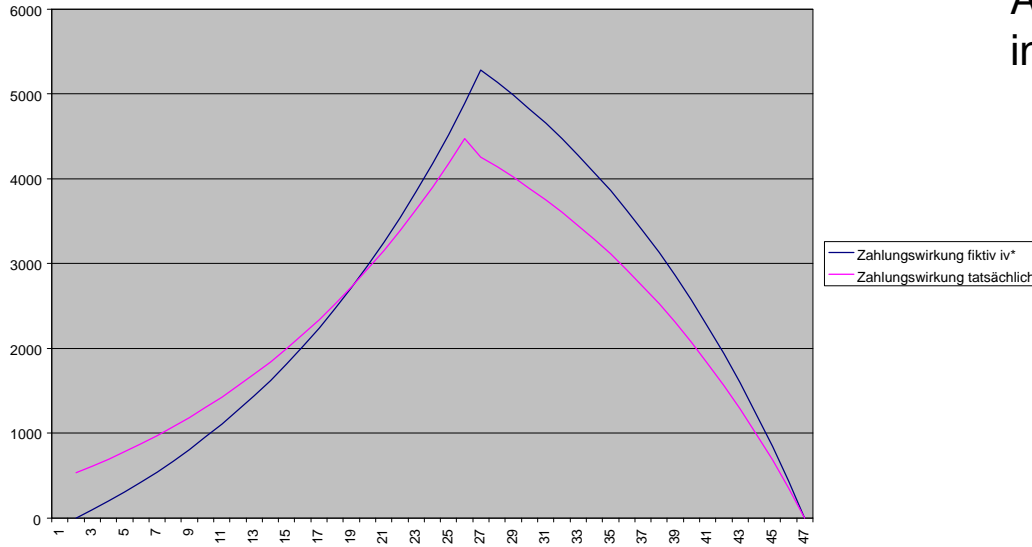
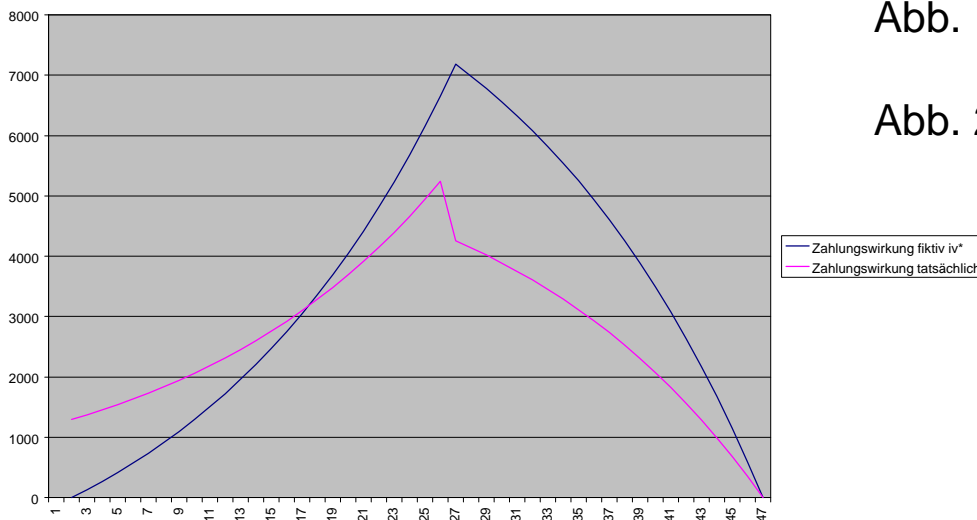


Abbildung der Zahlungswirkungen von Pensionsrückstellungen



Anwendungsvorschlag: implizite Kapitalkosten PR in WACC-Formel einsetzen (brutto-Ansatz)

Problem (1) Implizite Kapitalkosten PR hängen von der Lebensdauer PR ab (s.o.)
 i_V^* ist individuell zu berechnen

Problem (2) Auch bei korrektem i_V^* : tatsächlicher Kostenverlauf ist abweichend vom fiktiven Kostenverlauf

Abb. 1: $q = 50\%$; $i_V = 8\%$; $i_V^* = 6,76\%$

Abb. 2: $q = 0\%$; $i_V = 8\%$; $i_V^* = 9,2\%$

Abweichung ist umso größer, je niedriger q ist

1. Modellüberblick

- 1.1. Unternehmensbewertung und Pensionsrückstellungen
- 1.2. Kapitalkosten von Pensionsrückstellungen

2. Ein zweistufiges Adjusted Present Value – Modell

- 2.1. Die Vorgehensweise
- 2.2. Das Ausschüttungs- und das Verdrängungsmodell als Spezialfälle des allgemeinen Bewertungsmodells

3. Die Kosten von Pensionsrückstellungen: Aussagen des Verdrängungsmodells

- 3.1. Die Kostenkomponenten: nicht verdrängter Nettolohn (Disagio) und Zinsanteil PR
- 3.2. Die Bedeutung der Lohnverdrängungsquote q

4. Modellvergleiche: zweistufiges APV-Modell, Ausschüttungsmodell und WACC-Ansatz

- 4.1. Fall 1: $q = 100\%$ und $i = i_{PR}$
- 4.2. Fall 2: $q < 100\%$ und $i > i_{PR}$

5. Ergebnisse

1. Die Modelle zur Ermittlung der Kosten von Pensionszusagen und zur Einbeziehung von Pensionsrückstellungen in die Unternehmensbewertung unterstellen entweder eine zusätzliche Ausschüttung oder eine Kreditrückzahlung in Höhe der zusätzlichen Unternehmensliquidität.
2. Verwendet man ein zweistufiges APV-Modell zur Unternehmensbewertung, dann lassen sich diese Annahmen als Spezialfälle eines generellen Bewertungsansatzes darstellen. Die Verwendungsannahme kann dann im ersten Bewertungsschritt über die Planung des gesamten Fremdkapitalbestandes in die Bewertung eingebaut werden.
3. Im Spezialfall der vollständigen Lohnverdrängung und der Identität von Rechnungs- und Verschuldungszinsfuß führen das zweistufige APV-Modell und das Ausschüttungsmodell zu identischen Ergebnissen, wenn der aktuelle Buchwert der Pensionsrückstellungen vom Firm Value abgezogen wird. Der WACC-Ansatz ist in der Lage, die Ergebnisse der beiden Modelle zu replizieren.
4. Für Lohnverdrängungsquoten $< 100\%$ und unterschiedliche Rechnungs- und Fremdkapitalzinsätze liefert das zweistufige APV-Modell korrekte Ergebnisse. Im Ausschüttungsmodell ist zusätzlich die Bruttozinsersparnis gegenüber Fremdkapital zu berücksichtigen. Für das WACC-Modell ergeben sich Probleme aus der zeitlichen Verteilung der beiden Komponenten der PR-Kosten.

Von Matrizen, Determinanten und impliziten Bewertungsfunktionen
– einige weitere Anmerkungen zum Zirkularitätsproblem in der
Unternehmensbewertung

Christopher Casey*

e-mail: christopher.casey@wu-wien.ac.at

Version 1.2, Juni 2002**

* Institut für Finanzierung und Finanzmärkte, Ordinariat für Investmentbanking und Kapitalmarkt-
kommunikation, Wirtschaftsuniversität Wien.

** Der Verfasser dankt Otto Loistl und Alexander Veverka für wertvolle Anmerkungen.

Inhaltverzeichnis

Ergebnisse.....	3
1. Problemstellung	4
1.1 Untersuchungsgegenstand	4
1.2 Bezug zur einschlägigen Literatur.....	4
2. Zum Begriff der Zirkularität.....	11
3. WACC-Ansatz bei autonomer Finanzierung.....	12
3.1 Bewertungsgleichung im Mehrperiodenmodell	13
3.1.1 Roll Back-basierte Herleitung der Bewertungsgleichung.....	15
3.1.2 Roll Back-basierte Lösung der Bewertungsgleichung	16
3.2 Allgemeine Lösungsalgorithmen.....	19
3.3 Bewertungsgleichung im Rentenmodell.....	27
4. Ökonomische Würdigung.....	29
5. Schlußbetrachtung	41
Zusammenfassung	43
Verzeichnis der zitierten Literatur	44

Ergebnisse

- Das in der Literatur zur Unternehmensbewertung diskutierte Roll Back-Verfahren kann sowohl zur Herleitung von (gegebenenfalls zirkulären) DCF-Bewertungsgleichungen, als auch zur Lösung derselben Anwendung finden. Der anwendungsorientierte Einsatz des Verfahrens zur Lösung von Zirkularitätsproblemen bringt keine nennenswerten Vorteile mit sich.
- Wird das Bewertungsproblem formal präzise beschrieben, dann zeigt sich, daß die Lösung des Zirkularitätsproblems die Lösung eines inhomogenen linearen (T,T) -Gleichungssystems impliziert, wobei T die Länge der Detailplanungsphase bezeichnet. Zur Lösung des Zirkularitätsproblems kommen daher prinzipiell alle Algorithmen in Betracht, mit denen quadratische Gleichungssysteme gelöst werden können.
- In der linearen Algebra wird das Roll Back-Verfahren durch die im Rahmen des Gauß'schen Lösungsverfahrens zur Anwendung kommende Rückwärtssubstitution beschrieben. Neben der Rückwärtssubstitution existieren Möglichkeiten, den Marktwert der betrachteten Kapitalposition in einem einzigen Schritt zu ermitteln, ohne dabei die künftige Marktwertentwicklung der Kapitalposition explizit über das Roll Back-Verfahren bestimmen zu müssen. In diesem Beitrag wird eine simultane Lösung des Bewertungsproblems mittels inverser Matrizen und Determinanten untersucht.
- Die Bewertungsmodalitäten werden in diesem Beitrag am Beispiel des WACC-Ansatzes mit unterstellter autonomer Finanzierung demonstriert. Die Struktur der Lösungsmenge beschreibt dabei auch eine Lösung nach dem APV-Ansatz. Vor diesem Hintergrund kann die Lösung des Zirkularitätsproblems als Überführung der impliziten Definition der WACC-Bewertungsfunktion in ihre explizite Definition verstanden werden.
- Bei gegebener Finanzierungsstrategie sind alle DCF-Varianten im Ergebnis gleichwertig. Die Suche nach neuen und die Analyse von bekannten DCF-Bewertungsgleichungen könnte jedoch von der Suche und Analyse neuer Datenqualitäten motiviert sein.

1. Problemstellung

1.1 Untersuchungsgegenstand

In diesem Beitrag soll das in der Literatur zur Unternehmensbewertung als Roll Back-Verfahren bezeichnete Lösungsverfahren für sogenannte Zirkularitätsprobleme *ökonomisch* und *formaltheoretisch* gewürdigt werden. Hiermit einhergehend werden alternative Lösungsalgorithmen für das Zirkularitätsproblem zur Diskussion gestellt.

Das Roll Back-Verfahren bezeichnet kein eigenständiges Bewertungsverfahren, sondern vielmehr eine spezielle Bewertungstechnik zur Lösung allfälliger mehrperiodiger Bewertungsprobleme: Ausgehend von einem Planungshorizont T werden die zeitpunktbezogenen Marktwerte der betrachteten Kapitalposition in einer bis zum Bewertungszeitpunkt 0 fortschreitenden sukzessiven Rückwärtsrechnung ermittelt. Ergebnis dieser sukzessiv-retrograden Rechnung ist ein Marktwert im Bewertungszeitpunkt. Das solcherart charakterisierte Roll Back-Verfahren kann prinzipiell sowohl zur *Herleitung* von gegebenenfalls zirkulären DCF-Bewertungsgleichungen, als auch zur *Lösung* derselben Anwendung finden.

1.2 Bezug zur einschlägigen Literatur

Fama (1977) hat in einem bezüglich erstgenannter Anwendung richtungsweisenden Beitrag die grundlegenden Voraussetzungen und Eigenschaften einer Bewertung mehrperiodiger Zahlungsströme mit Hilfe des einperiodigen CAPM analysiert.¹ Die wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit betreffen die für eine mehrperiodige Anwendung des CAPM zu treffenden Annahmen bezüglich der Stochastizität der Modellgrößen. Aus der dynamischen (neoklassischen) Kapitalmarkttheorie² ist bekannt, daß die Zustandsunabhängigkeit künftiger Investitionsmöglichkeiten (und damit die Zustandsunabhängigkeit der sogenannten abgeleiteten Nutzenfunktion) von maßgeblicher Bedeutung für die schematische Übertragung des einperiodigen CAPM auf mehrere Perioden ist.³ Die einfachste Möglichkeit, eine

¹ Der Ansatz von Myers/Turnbull (1977) ist gleichermaßen zu würdigen. Die in diesem Modell zur Anwendung kommenden Bewertungs- und Lösungsprozeduren ähneln sehr den von Fama verwendeten. Beide Ansätze unterscheiden sich jedoch in der konkreten Ausprägung des unterstellten multiplikativen Cash Flow-Prozesses. Insbesondere wird bei Myers/Turnbull ein Wachstum in den erwarteten Cash Flows zugelassen, wobei die Wachstumsraten als konstant angenommen und modellexogen vorgegeben werden.

² Ein Abriß der Entwicklungslinien bezüglich der Bemühungen um eine Dynamisierung der Kapitalmarkttheorie wird von Campbell (2000) und Sundaresan (2000) gegeben.

³ Vgl. ausführlich Wilhelm (1983a), S. 20 ff.. Plant der Investor myopisch, dann ist diese Einschränkung zu relativieren. Wird eine zeitadditive Konsumnutzenfunktion mit logarithmischem Nutzen unterstellt – in diesem Fall sind die Anleger gegenüber Veränderungen der zukünftigen Investitionsmöglichkeiten indifferent – dann erhält man im Ergebnis auch bei stochastisch variierenden Investitionsmöglichkeiten eine zustandsunabhängige Bewertung, die ohne zusätzliche Annahmen auskommt. Vgl. in diesem Zusammenhang unter anderen Franke (1984); Ingersoll (1987), S. 238-240, 248 f.; Wilhelm (1983a), S. 30, 68 ff.

Anwendung des CAPM auf mehrperiodige Zahlungsströme bewertungstheoretisch zu substantiieren, besteht dann darin, die Zustandsabhängigkeit der Investitionsmöglichkeiten per Annahme auszuschließen.⁴ Dieser Weg wird von Fama (1977) beschritten, indem angenommen wird, daß der risikolose Zinssatz und der Marktpreis des Risikos im Zeitablauf deterministisch, das heißt nicht-stochastisch, verlaufen. Die künftige Entwicklung dieser Größen ist mithin im Bewertungszeitpunkt mit Sicherheit bekannt. Hiermit einhergehend müssen bestimmte Anforderungen an die Ausprägung des stochastischen Cash Flow-Prozesses gestellt werden, damit die von ihm induzierte Entwicklung der erwarteten Renditen im Zeitablauf ebenfalls deterministisch verläuft.⁵ Der diesbezüglich von Fama ins Auge gefaßte Cash Flow-Prozeß wird im Allgemeinen als multiplikativer Cash Flow-Prozeß bezeichnet.⁶ Mit den von Fama herausgearbeiteten Bedingungen für die Gültigkeit des CAPM im Mehrperiodenmodell wird nicht nur eine sequenzielle Anwendung des statischen Kapitalmarktmodells zur Bewertung mehrperiodiger riskanter Zahlungsströme theoretisch gedeckt, sondern auch die Ableitung geschlossener, kapitalkostenbasierter DCF-Bewertungsgleichungen mit nicht-stochastischen Diskontierungszinssätzen möglich, in denen sich der Marktwert einer zu bewertenden Zahlungsreihe durch Diskontieren der (unbedingten) Erwartungswerte der periodischen Zahlungen mit konstanten beziehungsweise periodenspezifischen Kalkulationszinssätzen ergibt.⁷

⁴ Der tiefere Zusammenhang zwischen der Ausprägung der Konsumnutzenfunktion, der Verteilungsform der Ergebnisausprägungen, der Stochastizität der Zinssätze für risikofreie Anlagen, der Stochastizität der periodischen Risikoprämien und Kovarianzmatrizen und der Gültigkeit des CAPM im Mehrperiodenmodell wird bei Wilhelm (1983a), S. 62 ff. mit Bezug auf die einschlägige Literatur ausführlich diskutiert. Im Lichte der restriktiven Voraussetzungen einer quasi-statischen Anwendung des CAPM auf mehrperiodige Bewertungsprobleme, vgl. hierzu insbesondere Wilhelm (1983a), S. 102 ff., ist auch zu fragen, ob nicht jenen Bewertungsansätzen eine neue Modellqualität beizumessen ist, die ein Bewertungsergebnis ohne Rekurs auf Arbitrage- oder Gleichgewichtsannahmen aus einzelbetrieblichen Bewertungs- und Lösungsprozeduren abzuleiten versuchen. Vgl. zu einem Überblick der verschiedenen Modellvarianten Ballwieser (1990), S. 8–10 und die dort angegebene Literatur.

⁵ Vgl. neben dem Originalbeitrag von Fama unter anderen Haley (1984), Hachmeister (1998), Laux (1999), Schwetzler (2000) und Röder/Müller (2001).

⁶ Vgl. zum Beispiel Sick (1986), S. 29; auch Fama (1996), S. 425.

⁷ Die von Constantinides (1980) herausgearbeiteten (Minimal-)Bedingungen für die Gültigkeit des CAPM im Mehrperiodenmodell bedürfen an dieser Stelle keiner näheren Kommentierung. Constantinides zeigt, daß unter geeigneten, hier nicht näher spezifizierten Annahmen bezüglich der Beschaffenheit des Kapitalmarktes, der Stochastizität des Renditeprozesses der im Produktionssektor tätigen Unternehmen sowie der Existenz eines repräsentativen Investors, die periodenbezogenen erwarteten Renditen der betrachteten Unternehmen durch das CAPM erklärt werden können, obwohl die Verteilung der Marktrendite, der risikolose Zinssatz und in weiterer Folge der von der erwarteten Marktrendite, der Varianz der Marktrendite und dem risikolosen Zinssatz abhängige Marktpreis des Risikos zustandsabhängig sind, das heißt im Zeitablauf stochastisch variieren. Die sich hieraus ergebenden Implikationen für die Projekt- und Unternehmensbewertung werden von Constantinides wie folgt gewürdigt: „The market price of risk and the covariance of the cash flows of a project with the market return will, in general, depend on preceding events. Therefore, the sequential application of the SLM model in the discounting of stochastic cash flows becomes computationally complex and of little practical use.“ [S. 84 f.]. Die Ableitung einer geschlossenen, kapitalkostenbasierten Bewertungsgleichung wird durch das Modell von Constantinides nicht begründet. In der praktischen Anwendung wäre der Marktwert eines Zahlungsstroms daher in einer vom Ende des Planungszeitraumes ausgehenden und bis zum Bewertungsstichtag fortschreitenden rekursiven Rechnung mit zeit- und zustandsabhängigen Diskontierungszinssätzen zu bestimmen.

Bei Hachmeister (1998) werden die Ergebnisse von Fama (1977) und Fama (1996) in einem Zweiperioden-Modell mit diskreten Cash Flow-Ausprägungen rekapituliert, wobei entgegen Fama (1977) das Roll Back-Verfahren nicht unmittelbar mit dem einperiodigen CAPM, sondern mit aus dem CAPM abgeleiteten Preisen von Arrow-Debreu-Papieren praktiziert wird. Einen Schwerpunkt der Ausführungen bilden die verteilungstheoretischen Implikationen des multiplikativen Cash Flow-Prozesses im Lichte der Verteilungsannahmen des CAPM.⁸

Bei Miles/Ezzell (1980) wird das Roll Back-Verfahren zur Ableitung von Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen bei unterstellter wertorientierter Finanzierung mit konstanter Zielkapitalstruktur im Zeitablauf eingesetzt. Ihr Modell basiert im Prinzip auf der Bewertungskonzeption des APV-Ansatzes, wobei die Kapitalkosten bei vollständiger Eigenfinanzierung modellexogen vorgegeben werden. Miles/Ezzell treffen dann auch die Annahme, daß es zulässig sei, den Marktwert eines künftigen riskanten Free Cash Flow durch Diskontierung des erwarteten Cash Flow mit einem konstanten Kalkulationszinssatz zu bestimmen. Hiermit wird implizit unterstellt, daß die von Fama herausgearbeiteten Bedingungen bezüglich der Ausprägung des zugrundeliegenden Free Cash Flow-Prozesses erfüllt sind.⁹

Löffler (1998) erweitert die Konzeption von Miles/Ezzell (1980), indem eine im Zeitablauf deterministische, variable Zielkapitalstruktur zugelassen wird. Die grundlegende Bewertungsmethodologie entspricht jener von Miles/Ezzell. Auch in diesem Ansatz sind die Kapitalkosten bei vollständiger Eigenfinanzierung modellexogene Variable.

Miles/Ezzell (1985) leiten ebenfalls Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen bei wertorientierter Finanzierung und konstanter Zielkapitalstruktur im Zeitablauf ab, die rekursive Wertermittlung wird jedoch im Kontext der von Fama (1977) gewonnenen Ergebnisse praktiziert. Die Kapitalkosten bei vollständiger Eigenfinanzierung sind in dieser Modellvariante modellendogene Variable.

Bei Sick (1986) werden unter der Annahme der Gültigkeit des CAPM Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen für sogenannte additive Cash Flow-Prozesse, das sind Prozesse, deren periodische Cash Flows eine additive Funktion von der Markttrendite sind, rekursiv

⁸ Auf die verteilungstheoretischen Implikationen der mehrperiodigen Anwendung des einperiodigen CAPM macht Fama (1996) aufmerksam.

⁹ Die Ergebnisse von Löffler (2001), S. 9 ff. sind entsprechend zu würdigen: Sind die von Fama an den Cash Flow-Prozeß gestellten Anforderungen nicht erfüllt, dann vermag die Bewertungskonzeption von Miles/Ezzell (1980) Arbitragegelegenheiten zu induzieren. Vgl. hierzu auch Löffler (2002).

hergeleitet.¹⁰ Fremdfinanzierung findet in diesem Ansatz keine Berücksichtigung. Im Ergebnis erhält Sick eine auf Basis von Sicherheitsäquivalenten formulierte Bewertungsgleichung.

Richter (2001) leitet Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen auf der Basis des Binomialmodells rekursiv ab, wobei sowohl additive, multiplikative als auch Cash Flow-Prozesse ohne intertemporale stochastische Abhängigkeiten betrachtet werden. Finanzierungseffekte bleiben in diesem Beitrag noch unberücksichtigt. Im Zusammenhang mit dem multiplikativen Cash Flow-Prozeß geht Richter von im Zeitablauf konstanten Wachstumsraten der erwarteten Cash Flows aus. Als Bewertungsprinzipien kommen sowohl die risikoneutrale Bewertung als auch die Bewertung mit Hilfe des CAPM zur Anwendung.

In einer Weiterführung von Richter (2001) verwendet Richter (2002a) das Roll Back-Verfahren zur expliziten Ableitung der Bewertungsformel des WACC-Ansatzes bei gegebener wertorientierter Finanzierung mit im Zeitablauf deterministisch variierenden Verschuldungsgraden und gegebenem multiplikativen Binomial Free Cash Flow-Prozeß mit im Zeitablauf deterministisch variierenden Wachstumsraten der erwarteten Cash Flows. Dabei werden auch die Parallelen zu den Ergebnissen von Miles/Ezzell (1985) und Löffler (1998) aufgezeigt.

Bei Richter/Drukarczyk (2001) wird das Roll Back-Verfahren zur modellendogenen Bestimmung – in der Terminologie von Richter/Drukarczyk „zukunftsgerichteten Schätzung“ – von Eigenkapitalkosten beziehungsweise Betafaktoren verwendet. Die Bewertung erfolgt auf der Basis des CAPM und eines multiplikativen Binomial Free Cash Flow-Prozesses mit im Zeitablauf konstanten Wachstumsraten der erwarteten Cash Flows, das heißt mit konstantem Unternehmenswachstum, und unter Berücksichtigung von Fremdfinanzierung und Unternehmenssteuern. Im Hinblick auf die Finanzierungspolitik der Unternehmung wird die autonome, die wertorientierte und die sogenannte bilanzorientierte Finanzierungspolitik – gemeint ist der Fall der wertorientierten Politik auf Basis eines zu Buchwerten gemessenen Verschuldungsgrades – untersucht.¹¹ Mit der von Richter (2001) und Richter/Drukarczyk (2001) entwickelten Modellkonzeption wird ein erster Schritt in Richtung einer mit der Theorie konform gehenden zukunftsorientierten Bestimmung von Kapitalkosten gemacht.¹²

¹⁰ Sick (1986) setzt Cash Flows und Markttrenditen zueinander in Beziehung. Additive (S. 24 ff.) und multiplikative (S. 29 ff.) Cash Flow-Prozesse werden dann jeweils durch die Form ihrer Abhängigkeit vom 'systematic risk faktor' (die Rendite des Marktportfolios) im Zeitablauf beschrieben. Vgl. hierzu auch Richter (2002b), S. 116 ff. und die dort angegebene Literatur.

¹¹ Im allgemeinen Zusammenhang mit der Finanzierungsstrategie der Unternehmung ist auch die am Cash Flow orientierte Verschuldungspolitik zu nennen. Vgl. hierzu Löffler (2000), S. 4 ff..

¹² Der Bedeutung einer modellendogenen Bestimmung von Kapitalkosten ohne Rückgriff auf historische Daten würdigend sollen hier drei ausgewählte Fachvertreter ausführlich zu Wort kommen: Myers/Turnbull (1977), S. 331 führen in diesem Zusammenhang folgendes aus: „The bad news is that the real determinants of beta are more complicated than is generally suspected. Beta depends on the link between cash

Bei Löffler (2001) erfolgt eine rekursive Ableitung des WACC-Ansatzes bei gegebener wertorientierter Finanzierung und multiplikativem Free Cash Flow-Prozeß auf der Basis des risikoneutralen Bewertungsansatzes, wobei analog zu Löffler (1998) eine deterministische, variable Zielkapitalstruktur im Zeitablauf zugelassen wird. Eine Beschränkung auf binomialverteilte Ergebnisausprägungen findet nicht statt.

Bei Steiner/Wallmeier (1999) werden ebenfalls Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen bei gegebener wertorientierter Finanzierung mit Hilfe des Roll Back-Verfahrens abgeleitet. Es wird ein Zwei-Phasen-Modell mit im Zeitablauf variierenden erwarteten Cash Flows in der ersten Phase und konstanten erwarteten Cash Flows über einen unendlichen Zeitraum in der zweiten Phase betrachtet. Die Kapitalkosten bei vollständiger Eigenfinanzierung sind annahmegemäß modellexogen vorgegeben.

flow forecast errors and forecast errors for the market return. It depends on asset life, the growth trend in the cash flows, and on the pattern of expected cash flows over time. It depends on the procedure by which investors forecast asset cash flows.“

Bruner/Eades/Harris/Higgins (1998) stellen im Rahmen einer empirischen Studie über die praktischen Bestimmungsmodalitäten von Kapitalkosten nach dem CAPM folgendes fest: „Finance theory calls for a forward-looking beta, one reflecting investors’ uncertainty about the future cash flows to equity. Because forward-looking betas are unobservable, practitioners are forced to rely on proxies of various kinds. Most often this involves using beta estimates derived from historical data and published by such sources as Bloomberg, Value Line, and Standard & Poor’s. [...] Finance theory says the equity market risk premium should equal the excess return expected by investors on the market portfolio relative to riskless assets. How one measures expected future returns on the market portfolio and on riskless assets are problems left to practitioners. Because expected future returns are unobservable, all survey respondents extrapolated historical returns into the future on the presumption that past experience heavily conditions future expectations. [...] Best practice is largely consistent with finance theory. Despite broad agreement at the theoretical level, however, several problems in application remain that can lead to wide divergence in estimated capital costs. Based on these remaining problems, we believe that further applied research on two principal topics is warranted. First, practitioners need additional tools for sharpening their assessment of relative risk. [...] Second, practitioners could benefit from further research on estimating equity market risk premia. Current practice displays large variations and focuses primarily on averaging past data. Use of expectational data appears to be a fruitful approach.“ [Bruner/Eades/Harris/Higgins (1998), S. 19 f., 27.]

Die modelltheoretischen Implikationen einer empirischen Schätzung von Kapitalkosten auf Basis von historischen Daten, wie sie sich bei Anwendung des einperiodigen CAPM auf mehrperiodige Bewertungsprobleme ergeben, werden schließlich auch bei Fama (1996) diskutiert: „In short, although an expected 1-period simple return, $E_t(R)$, is the right *concept* for the cost of capital [...], the right *estimate* of $E_t(R)$ for applications [...] is more complicated and typically involves a combination of historical compound and average simple returns.“ [Fama (1996), S. 419, Hervorhebung im Original.]

Um die Eigenkapitalkosten bei vollständiger Eigenfinanzierung aus empirisch beobachteten Eigenkapitalkosten bei teilweiser Fremdfinanzierung abzuleiten, würde man darüberhinaus prinzipiell nicht nur die genaue Kenntnis über die Finanzierungspläne der in die Stichprobe eingehenden Unternehmen benötigen, sondern auch die Annahme treffen müssen, daß diese Pläne allen Marktteilnehmern bekannt sind. Der Versuch einer modellendogenen Bestimmung von Kapitalkosten, dem Grundsatz nach die Bestimmung von Kapitalkosten aus der Kovarianz der künftigen Zahlungen mit der künftigen Markttrendite, erscheint auch vor diesem Hintergrund sehr zweckmäßig.

Inselbag/Kaufold (1997) und Heitzer/Dutchmann (1999)¹³ verwenden das Roll Back-Verfahren zur Ableitung von Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen im Modell der Kapitalisierung einer endlichen Zahlungsreihe bei unterstellter autonomer Finanzierung. Dem Ansatz von Modigliani/Miller folgend, sind die Kapitalkosten bei vollständiger Eigenfinanzierung in dieser Modellvariante modellexogene Variable.

Bei Husmann/Kruschwitz/Löffler (2002) wird die (Vorwärts-)Rekursion zur Ableitung einer APV-orientierten Marktwertbestimmungsgleichung für das Eigenkapital einer teilweise fremdfinanzierten Unternehmung bei sicheren Erwartungen und unter dem Steuerregime des Halbeinkünfteverfahrens herangezogen.¹⁴ Die Berücksichtigung des Risikos im Modell erfolgt, im Bewußtsein um die Komplexität des aus einem zwischen Eigen- und Fremdkapital diskriminierenden Steuersystems auf Unternehmens- und Anteilseignerebene resultierenden Bewertungsproblems, pragmatisch.¹⁵

Bei Fischer/Hahnenstein/Heitzer (1999) werden DCF-Bewertungsprozeduren unter Berücksichtigung von Handlungsspielräumen und binomialverteilten Ergebnisausprägungen durch rekursive Anwendung des CAPM auf Zustandsbäume mit bedingt-optimalem Verhalten hergeleitet.¹⁶ Es wird gezeigt, daß unter den getroffenen Annahmen die Bewertung strategischer Realoptionen auf der Basis des CAPM, auf der Basis des Binomialmodells und auf der Basis des Time-State-Preference-Modells im Ergebnis gleichwertig sind.¹⁷

Bei Schwetzler (2000) werden Bewertungsgleichungen im individualistischen Ansatz nach der Sicherheitsäquivalent- und Risikozuschlagsmethode abgeleitet. Es werden multiplikative Cash Flow-Prozesse und Cash Flow-Prozesse mit im Zeitablauf stochastisch unabhängigen Zahlungen betrachtet. Die grundlegende Bewertungsmethodologie folgt im Prinzip jener von

¹³ Vgl. Heitzer/Dutchmann (1999), S. 1465-1466. In den weiteren Ausführungen dieses Beitrages wird der Einsatz des Roll Back-Verfahrens auch zur Lösung von zirkulären Bewertungsgleichungen vorgeschlagen.

¹⁴ Vgl. auch Husmann/Kruschwitz (2001) im Kontext der Investitionsbewertung.

¹⁵ Die Autoren bemerken in diesem Zusammenhang: „Im Folgenden unterstellen wir zunächst, dass die Bewertung vorgenommen werden kann, ohne der Unsicherheit Rechnung tragen zu müssen. Nachdem wir unsere Resultate unter diesen einfachen Bedingungen erarbeitet haben, werden wir ihnen aber den Mantel des Risikos überstülpen.“ [Husmann/Kruschwitz/Löffler (2002), S. 25; Vgl. auch S. 34 ff. für eine diesbezügliche Diskussion.]. Hiermit werden die arbitrage-theoretischen Implikationen des Halbeinkünfteverfahrens im Hinblick auf die Eindeutigkeit des Bewertungsergebnisses angesprochen. Vgl. hierzu im Detail Drukarczyk (2001), S. 251 ff. und Lobe (2001). Die Abbildung des Halbeinkünfteverfahrens im DCF-Ansatz wird auch bei Husmann/Kruschwitz/Löffler (2001b) am Beispiel des WACC-Ansatzes mit unterstellter wertorientierter Finanzierung und multiplikativem Free Cash Flow-Prozeß auf der Basis des risikoneutralen Bewertungsansatzes diskutiert. Bei Dinstuhl (2002) werden Bewertungsgleichungen im Halbeinkünfteverfahren für den WACC-, APV- und FTE-Ansatz bei autonomer und wertorientierter Finanzierung zur Diskussion gestellt.

¹⁶ Vgl. diesbezüglich auch die Ausführungen bei Ballwieser (2002), S. 188 ff..

¹⁷ Vgl. in diesem Zusammenhang insbesondere Dybvig/Ingersoll (1982), S. 239 f..

Fama (1977), wobei das einperiodige Marktwertkalkül des CAPM durch ein einperiodiges Erwartungsnutzenkalkül mit logarithmischer Nutzenfunktion ersetzt wird.¹⁸

In einem weiter gefaßten Kontext können an dieser Stelle auch alle nicht marktwertbezogenen Bewertungskalküle genannt werden, die Bewertungsprobleme nach dem üblichen Rekursionsverfahren der dynamischen Programmierung lösen.¹⁹ So beispielsweise der individualistische Ansatz von Ballwieser (1980), in dem eine Bewertung auf der Basis der Ertragswertmethode mit Hilfe von Entscheidungs- und Zustandsbäumen für unterschiedliche Risikonutzenfunktionen vorgenommen wird. Ergebnis der Rekursion der dynamischen Programmierung ist ein individueller Grenzpreis, der jenen Barwert künftiger Sicherheitsäquivalente beschreibt, der sich bei Befolgen nutzenmaximaler Strategien ergibt.²⁰

Seine vielleicht bekannteste Anwendung erfährt das Roll Back-Verfahren in der Optionspreistheorie. Die Ableitung der diskreten Optionspreisformel im Binomialmodell erfolgt bekanntlich durch eine rekursive Anwendung der für das Zwei-Zustände-Einperioden-Modell entwickelten Bestimmungsgleichung des Optionspreises (Two-State Option Pricing Model) auf den Binomialprozeß des Callpreises.²¹

Allen genannten Ansätzen gemeinsam ist das Untersuchungsziel, namentlich die explizite Herleitung von Bewertungsgleichungen und -prozeduren aus einem vorgegebenen Prämissenkatalog.

In der Literatur wird das Roll Back-Verfahren nicht nur für die Herleitung von Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen eingesetzt, sondern auch zur Lösung von Zirkularitätsproblemen, indem die der zirkulären Bewertungsfunktion zugrundeliegende Roll Back-Gleichung zur Lösung dieser Funktion herangezogen wird: Ausgehend von konkreten Unternehmensdaten werden die zeitpunktbezogenen Marktwerte der Kapitalposition mit Hilfe einer in $T - 1$ beginnenden sukzessiv-retrograden Rechnung ermittelt. Nach Durchlauf des Roll Back-Verfahrens steht das gesuchte Bewertungsergebnis in zahlenmäßiger Höhe fest. In dieser Interpretation ist das Roll Back-Verfahren als Lösungsalgorithmus für

¹⁸ Vgl. in diesem Zusammenhang auch Kürsten (2002), der die entscheidungstheoretische Fundierung der Sicherheitsäquivalent-Methode überhaupt in Frage stellt.

¹⁹ In diesem Zusammenhang sind auch die der Dynamisierung des statischen Kapitalmarktmodells zugrundeliegenden rekursiven Lösungsprozeduren bezüglich der intertemporalen Konsum-Investitions-Entscheidung der Anleger zu nennen. Vgl. hierzu unter anderen Fama (1970); Huang/Litzenberger (1988), S. 193 ff.; Wilhelm (1983a), S. 27 ff..

²⁰ Wesentliche Erkenntnis des Modells ist, „daß die Höhe des Zinsfußes die optimale Geschäftspolitik des potentiellen Käufers, die sich daraus ergebenden Zahlungsverteilungen und deren Risikostruktur mitbestimmt. Der Grenzpreis eines potentiellen Unternehmenskäufers wird deshalb durch die Höhe des Kalkulationszinsfußes sowohl über den Diskontierungseffekt als auch über den Einfluß auf die optimale Geschäftspolitik bestimmt.“ [Ballwieser (1980), S. 73.].

²¹ Vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979); Rendleman/Bartter (1979).

zirkularitätsbehaftete DCF-Bewertungsgleichungen zu verstehen. Der solcherart charakterisierte Einsatz des Roll Back-Verfahrens wurde von Schwetzler/Darijtschuk (1999) vorgeschlagen.

Diese Problemstellung führt der vorliegende Beitrag fort, indem gezeigt wird, daß der gesuchte Marktwert der betrachteten Kapitalposition mit Hilfe der Matrizen- und Determinantenrechnung in einem Schritt ermittelt werden kann, ohne dabei die erwartete Marktwertentwicklung der Kapitalposition *explizit* bestimmen zu müssen.

Der Beitrag ist wie folgt strukturiert: Als erstes soll das Zirkularitätsproblem formaltheoretisch beschrieben werden, indem die diesbezüglich relevante mathematische Terminologie verwendet wird. Im Anschluß daran soll das lösungsorientierte Roll Back-Verfahren in den Kontext üblicher mathematischer Lösungsalgorithmen gestellt werden. Hiermit einhergehend werden zum Roll Back-Verfahren alternative Lösungsalgorithmen für das Zirkularitätsproblem zur Diskussion gestellt. Im nächsten Schritt werden die Ergebnisse ökonomisch gewürdigt. Der Beitrag schließt mit einem Resümee.

2. Zum Begriff der Zirkularität

Eine anschauliche und prägnante Beschreibung dessen, was in der Bewertungsliteratur unter einem Zirkularitätsproblem verstanden wird, liefern Husmann/Kruschwitz/Löffler (2001a). Die Autoren sollen hier mit einem ausführlichen Zitat zu Wort kommen:

„Was in der Literatur zur Unternehmensbewertung unter einem Zirkularitätsproblem verstanden wird, macht man gern an derjenigen DCF-Methode klar, die mit gewogenen durchschnittlichen Kapitalkosten (WACC, weighted average cost of capital) arbeitet. Der Unternehmenswert wird berechnet, indem man die erwarteten künftigen Cash-Flows mit eben diesen durchschnittlichen Kapitalkosten diskontiert. Um die Kapitalkosten zu ermitteln, sind die Fremdkapitalkosten mit der Fremdkapitalquote und die Eigenkapitalkosten mit der Eigenkapitalquote zu gewichten. Da beide Kapitalanteile nur dann korrekt bestimmt werden können, wenn der Wert des Eigenkapitals bekannt ist, ist der Unternehmenswert bei Anwendung der WACC-Methode offensichtlich von sich selbst abhängig. Und genau, wenn das der Fall ist, pflegen die Unternehmensbewerter von Zirkularität zu sprechen. [...]. In der mathematischen Literatur sucht man vergeblich nach dem Begriff einer ‚zirkulären Gleichung‘ oder einer ‚zirkulären Funktion‘. Eine Abbildung des Typs $F(x, y) = 0$ nennt man vielmehr implizit. Stellt man dagegen eine explizite Funktion als Gleichung dar, so hat sie die Form $y = f(x)$. Links des Gleichheitszeichens steht die Variable y , rechts die Variable x . Bei den impliziten Funktionen unterscheidet man zwei Klassen. Die erste lässt sich in eine explizite

Darstellung überführen, zum Beispiel $4x - 2y - 6 = 0 \rightarrow y = 2x - 3$, die zweite nicht, beispielsweise $\sin x \cdot \sin y + x^2 - y = 0$. Diese Gleichung lässt sich nicht so umformen, dass die Variable y als Funktion von x dargestellt wird. Trotzdem ist es möglich, den Wert von y zu berechnen, wenn x gegeben ist. Allerdings muss man ein iteratives Näherungsverfahren benutzen.²²

Die solcherart vorgenommene Beschreibung des Zirkularitätsproblems hat den Vorzug präziser formaltheoretischer Begriffsbildung.²³ Zirkuläre Bewertungsgleichungen ergeben sich dann als klar abgegrenzte Funktionen. Für eine formale Würdigung des Zirkularitätsproblems im Sinne einer impliziten Bewertungsfunktion sind die in der Gleichung $F(x, y) = 0$ beziehungsweise $y = f(x, y)$ stehenden Variablen x (unabhängige Variable) und y (abhängige Variable) zu spezifizieren.

3. WACC-Ansatz bei autonomer Finanzierung

Dem WACC-Bezug von Husmann/Kruschwitz/Löffler (2001a) folgend, wird in diesem Beitrag die sich bei autonomer Finanzierung ergebende Bewertungsgleichung des WACC-Ansatzes zunächst auf Zirkularität im Sinne einer impliziten Funktion und den Ergebnissen entsprechend auf Lösbarkeit im Sinne der Existenz einer expliziten Form der Funktion untersucht.²⁴ Dabei werden folgende Modellvarianten betrachtet:

- Modell der Kapitalisierung einer endlichen Zahlungsreihe, im folgenden als *Mehrperiodenmodell* bezeichnet.
- Modell der Kapitalisierung einer unendlichen Zahlungsreihe mit konstanten erwarteten Cash Flows und Fremdkapitalbeständen, im folgenden als *Rentenmodell* bezeichnet.

Es wird ein Standard DCF-Modell mit den üblichen Annahmen untersucht:²⁵ Es besteht ein einfaches Steuersystem mit der linearen Abzugsfähigkeit von Fremdkapitalzinsen auf Unternehmensebene. Der Steuersatz ist konstant im Zeitablauf. Steuern auf Anteilseignerebene werden nicht beachtet. „Vertragliche Zinszahlungen werden geleistet; die steuerliche Bemessungsgrundlage sei hinreichend groß, um die Zinsaufwendungen der

²² Husmann/Kruschwitz/Löffler (2001a), S. 277, 278 f.

²³ Die Verwendung der mathematischen Terminologie zur formaltheoretisch präzisen Beschreibung von 'zirkulären' Bewertungsfunktionen findet sich bereits bei Loistl (1986), S. 230.

²⁴ Bei unterstellter wertorientierter Finanzierung ergibt sich in der Konzeption des WACC-Ansatzes eine Bewertungsfunktion in expliziter Form. Vgl. Miles/Ezzell (1980), S. 726 f.; auch Drukarczyk (2001), S. 218 ff. 287 ff.; Drukarczyk/Honold (1999), S. 337 f.; Kruschwitz/Löffler (1999), S. 10 ff.; Löffler (1998), S.4 ff.; Schwetzler/Darijtschuk (1999), S. 306; Steiner/Wallmeier (1999), S. 4 f.; Wallmeier (1999), S. 1476 ff..

²⁵ Vgl. in ähnlicher Darstellung Drukarczyk/Honold (1999), S. 334; Kruschwitz/Löffler (1999), S. 4 ff.; Wallmeier (1999), S. 1475.

Periode steuerlich voll zur Geltung zu bringen.“²⁶ Fremdfinanzierung findet in Form langfristiger Verträge mit Zinsbindung statt. Das Fremdkapital ist sicher.²⁷ Der risikolose Zinssatz und der Marktpreis des Risikos sind konstant im Zeitablauf. Die künftigen Free Cash Flows der Unternehmung werden durch einen multiplikativen Cash Flow-Prozeß generiert, der zudem konstante Kapitalkosten im Zeitablauf impliziert. Der nach Abzug des Fremdkapitaldienstes verfügbare Cash Flow wird zur Gänze an die Eigner ausgeschüttet (Vollausschüttungsfiktion).²⁸

3.1 Bewertungsgleichung im Mehrperiodenmodell

Im Mehrperiodenmodell mit unterstellter autonomer Finanzierung lautet die Bestimmungsgleichung des Eigenkapitalmarktwertes nach der Konzeption des WACC-Ansatzes:²⁹

$$(1) \quad V_0^{EK} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t]}{\prod_{n=1}^t (1+WACC_{t-n+1})} - V_0^{FK}$$

$$WACC_{\tau} = r \cdot (1-s) \cdot \frac{V_{\tau-1}^{FK}}{V_{\tau-1}^{EK} + V_{\tau-1}^{FK}} + k_{\tau}^{EK,F} \cdot \frac{V_{\tau-1}^{EK}}{V_{\tau-1}^{EK} + V_{\tau-1}^{FK}}$$

$$k_{\tau}^{EK,F} = k^{EK} + (k^{EK} - r) \cdot \frac{V_{\tau-1}^{FK} - V_{\tau-1}^{TS}}{V_{\tau-1}^{EK}}$$

$$V_{\tau-1}^{TS} = \sum_{m=\tau}^T \frac{TS_m}{(1+r)^{m-\tau+1}}, \quad TS_m = r \cdot s \cdot V_{m-1}^{FK}$$

²⁶ Drukarczyk/Honold (1999), S. 337. Vgl. auch S. 345 f. in Bezug auf die Bewertungsproblematik bei fehlender steuerlicher Abzugsfähigkeit.

²⁷ Unter dieser Annahme sind die Eigenkapitalgeber im Modell gegebenenfalls nachschußpflichtig, das heißt, sollte der realisierte Cash Flow einer Periode nicht zur vollständigen Bedienung des aufgenommenen Fremdkapitals ausreichen, dann stellen die Anteilseigner „dem Unternehmen im Wege einer Kapitalerhöhung zusätzliche finanzielle Mittel als Eigenkapital zur Verfügung.“ [Schwetzler (2001), S. 66.]. Vgl. auch Rudolph (1979), S. 160 im Kontext des CAPM. Hiermit wird auch die Frage nach der ökonomischen Relevanz der unterstellten Finanzierungsstrategie angesprochen. Diese wird durch zwei voneinander nicht unabhängige Sachverhalte charakterisiert: Erstens: Ist die Strategie ökonomisch zweckmäßig? Vgl. hierzu Richter/Drukarczyk (2001), S. 635 f. im Zusammenhang mit ökonomischer und bilanzieller Überschuldung; Schwetzler/Darijschuk (2000), S. 120 ff. im Zusammenhang mit Zahlungsunfähigkeit und potentieller Suboptimalität der Strategie aus der Sicht der Eigentümer. Zweitens: Ist die Strategie empirisch relevant? Vgl. hierzu Drukarczyk/Honold (1999), S. 342.

²⁸ Anschauliche Beispiele zu den finanzmathematischen Implikationen der Vollausschüttungsfiktion und der hiermit verbundenen Doppelzählungsproblematik im Rahmen der Cash Flow-Prognose finden sich bei Mandl/Rabel (1997), S. 117 ff.

²⁹ Vgl. Inselbag/Kaufold (1997), S. 117 f. (Gleichung 5 i.V.m. Gleichung 7); auch Heitzer/Dutschmann (1999), S. 1466 f. (Gleichung 13a i.V.m. Gleichung 7); Wallmeier (1999), S. 1477 (Gleichung 2b i.V.m. Gleichung 1b).

Wird ein Planungszeitraum von beispielsweise drei Perioden angenommen, dann erhält man die folgende Bewertungsgleichung:

$$V_0^{EK} = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_1]}{(1+WACC_1)} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2]}{(1+WACC_2) \cdot (1+WACC_1)} + \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]}{(1+WACC_3) \cdot (1+WACC_2) \cdot (1+WACC_1)} - V_0^{FK}$$

$$WACC_1 = r \cdot (1-s) \cdot \frac{V_0^{FK}}{V_0^{EK} + V_0^{FK}} + \left(k^{EK} + (k^{EK} - r) \cdot \frac{V_0^{FK} - V_0^{TS}}{V_0^{EK}} \right) \cdot \frac{V_0^{EK}}{V_0^{EK} + V_0^{FK}}, \quad V_0^{TS} = \frac{r \cdot s \cdot V_0^{FK}}{1+r} + \frac{r \cdot s \cdot V_1^{FK}}{(1+r)^2} + \frac{r \cdot s \cdot V_2^{FK}}{(1+r)^3}$$

$$WACC_2 = r \cdot (1-s) \cdot \frac{V_1^{FK}}{V_1^{EK} + V_1^{FK}} + \left(k^{EK} + (k^{EK} - r) \cdot \frac{V_1^{FK} - V_1^{TS}}{V_1^{EK}} \right) \cdot \frac{V_1^{EK}}{V_1^{EK} + V_1^{FK}}, \quad V_1^{TS} = \frac{r \cdot s \cdot V_1^{FK}}{1+r} + \frac{r \cdot s \cdot V_2^{FK}}{(1+r)^2}$$

$$WACC_3 = r \cdot (1-s) \cdot \frac{V_2^{FK}}{V_2^{EK} + V_2^{FK}} + \left(k^{EK} + (k^{EK} - r) \cdot \frac{V_2^{FK} - V_2^{TS}}{V_2^{EK}} \right) \cdot \frac{V_2^{EK}}{V_2^{EK} + V_2^{FK}}, \quad V_2^{TS} = \frac{r \cdot s \cdot V_2^{FK}}{1+r}$$

Die Gleichung wird offensichtlich durch zwei voneinander nicht unabhängige Variablengruppen charakterisiert: V_0^{EK} , V_1^{EK} und V_2^{EK} sowie $WACC_1$, $WACC_2$ und $WACC_3$. Der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert des Eigenkapitals V_0^{EK} ist gleich dem Barwert der künftig erwarteten Free Cash Flows abzüglich dem Marktwert des Fremdkapitals im Bewertungszeitpunkt. Die Marktwertentwicklung des Fremdkapitals (V_0^{FK} , V_1^{FK} , V_2^{FK} und $V_3^{FK} = 0$) wird annahmegemäß modellexogen in absoluter Höhe vorgegeben. Die erwarteten Free Cash Flows werden mit periodenspezifischen Kapitalkosten diskontiert. Der für den Zeitpunkt 1 erwartete Free Cash Flow $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_1]$ wird mit $WACC_1$ auf den Bewertungszeitpunkt 0 diskontiert. Der für den Zeitpunkt 2 erwartete Free Cash Flow $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2]$ wird mit $WACC_2$ auf den Zeitpunkt 1 und von dort mit $WACC_1$ auf den Zeitpunkt 0 diskontiert. Der für den Zeitpunkt 3 erwartete Free Cash Flow $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]$ wird mit $WACC_3$ auf den Zeitpunkt 2, von dort mit $WACC_2$ auf den Zeitpunkt 1 und von dort mit $WACC_1$ auf den Zeitpunkt 0 abgezinst. Der im Wege der Barwertermittlung von $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_1]$, $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2]$ und $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]$ in der Periode 1 zur Anwendung kommende Diskontierungszinssatz $WACC_1$ ist für alle drei Cash Flows identisch. Dies gilt gleichermaßen für den für $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2]$ und $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_3]$ in der Periode 2 zur Anwendung kommenden Diskontierungszinssatz $WACC_2$.

Die Diskontierungszinssätze $WACC_1$, $WACC_2$ und $WACC_3$ ergeben sich jeweils als Summe der mit den periodenbezogenen Marktwertanteilen von Eigen- und Fremdkapital gewichteten Eigen- und Fremdkapitalkosten der Periode, wobei letztere mit dem Faktor $(1-s)$ multipliziert werden, um den Steuervorteil aus der anteiligen Fremdfinanzierung zu erfassen.

Die Variable s bezeichnet dabei den Unternehmenssteuersatz. Die in den Bestimmungsgleichungen von $WACC_1$, $WACC_2$ und $WACC_3$ stehenden Klammerausdrücke beschreiben die periodenbezogenen Eigenkapitalkosten bei teilweiser Fremdfinanzierung. Sie werden in Gleichung (1) mit $k_\tau^{EK,F}$ bezeichnet. Der in der Periode τ zur Anwendung kommende Kapitalkostensatz bei teilweiser Fremdfinanzierung $k_\tau^{EK,F}$ ist abhängig von den Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung k^{EK} , dem risikolosen Zinssatz r , dem Fremdkapitalbestand $V_{\tau-1}^{FK}$, dem auf $\tau-1$ bezogenen Eigenkapitalmarktwert $V_{\tau-1}^{EK}$ und dem auf $\tau-1$ bezogenen Marktwert künftiger Tax Shields $V_{\tau-1}^{TS}$.

In der ökonomischen Interpretation beschreiben die Variablen $V_{\tau-1}^{EK}$, $\tau = 1, \dots, T$ die erwartete Entwicklung des Eigenkapitalmarktwertes im Zeitablauf. Alle zeitpunktbezogenen Marktwerte werden auf Basis des im Bewertungszeitpunkt 0 verfügbaren Informationsstandes bestimmt. Während V_0^{EK} als Punktwert zu deuten ist, sind die Variablen $V_1^{EK}, V_2^{EK}, \dots, V_{T-1}^{EK}$ als im Zeitpunkt 0 gebildete Erwartungswerte zu interpretieren.

Zwei Fragen sind von Bedeutung. *Erstens*: Wie kann Gleichung (1) hergeleitet werden? *Zweitens*: Wie kann Gleichung (1) gelöst werden, das heißt, wie kann der gesuchte Eigenkapitalmarktwert V_0^{EK} bestimmt werden?

3.1.1 Roll Back-basierte Herleitung der Bewertungsgleichung

Im Hinblick auf die Herleitung der mehrperiodigen Bewertungsgleichung (1) sollen hier zwei mögliche Modellvarianten angesprochen werden. Die Gleichung kann einerseits unter geeigneten Annahmen mit Hilfe des CAPM,³⁰ andererseits der Bewertungstechnik von Modigliani/Miller (1963) folgend, auf der Grundlage arbitragefreier Kapitalmärkte und des Konzepts von der Risikoklasse,³¹ abgeleitet werden. Beide Varianten verwenden das Roll Back Verfahren. In der ersten Modellvariante sind die Kapitalkosten bei vollständiger Eigenfinanzierung modellendogene Variable, in der zweiten Modellvariante modellexogene

³⁰ Vgl. zu der diesbezüglichen Bewertungsmethodologie grundlegend Fama (1977) und speziell in Bezug auf den Fall der wertorientierten Finanzierung Miles/Ezzell (1985).

³¹ Vgl. hierzu insbesondere Inselbag/Kaufold (1997), S. 117 f., sowie in etwas ausführlicherer Darstellung Heitzer/Dutschmann (1999), S. 1465 f., 1467. In dieser Variante wird der auf einen Zeitpunkt t bezogene Marktwert eines verschuldeten Unternehmens bei Arbitragefreiheit als der auf t bezogene Marktwert des unverschuldeten Unternehmens zuzüglich dem auf t bezogenen Marktwert künftiger Tax Shields definiert (APV-Ansatz). Bewertungsgleichungen und Kapitalkostenrelationen werden durch rekursives Anwenden der einperiodigen APV-Bewertungsgleichung abgeleitet, wobei die periodenspezifischen Marktwerte und Kapitalkosten des WACC-Ansatzes analog zu der von Modigliani/Miller (1963) verwendeten Bewertungsmethodologie durch algebraische Umformungen der zeitpunktbezogenen APV-Bewertungsgleichungen unter Berücksichtigung der im Cash Flow-Schema zwischen Free Cash Flow, Total Cash Flow und Flow to Equity bestehenden Beziehungen abgeleitet werden.

Variable. Essentiell für jedwede Herleitung ist die Wertadditivität des herangezogenen Preisfunktionals.³²

Beide genannte Varianten des Roll Back-Verfahrens – Roll Back-Verfahren mit CAPM-basierter Marktwertermittlung und Roll Back-Verfahren mit APV-basierter Marktwertermittlung – führen bei unterstellter autonomer Finanzierung (in der CAPM-basierten Herleitung nach umfangreichen Ableitungen) zu der folgenden Roll Back-Gleichung des WACC-Ansatzes:³³

$$(2) \quad V_{t-1}^{EK} = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t] + V_t^{EK} + V_t^{FK}}{1 + WACC_t} - V_{t-1}^{FK} \quad t = 1, \dots, T$$

$$WACC_t = r \cdot (1 - s) \cdot \frac{V_{t-1}^{FK}}{V_{t-1}^{EK} + V_{t-1}^{FK}} + k_t^{EK,F} \cdot \frac{V_{t-1}^{EK}}{V_{t-1}^{EK} + V_{t-1}^{FK}}$$

$$k_t^{EK,F} = k^{EK} + (k^{EK} - r) \cdot \frac{V_{t-1}^{FK} - V_{t-1}^{TS}}{V_{t-1}^{EK}}$$

$$V_{t-1}^{TS} = \sum_{m=t}^T \frac{TS_m}{(1+r)^{m-t+1}}, \quad TS_m = r \cdot s \cdot V_{m-1}^{FK}$$

Wird die Bestimmungsgleichung von V_{T-1}^{EK} in V_{T-2}^{EK} , der sich ergebende Ausdruck für V_{T-2}^{EK} wiederum in V_{T-3}^{EK} eingesetzt und wird dieses rekursive Einsetzungsverfahren bis zum Bewertungszeitpunkt 0 fortgeführt, dann erhält man die eingangs vorgestellte implizite Bestimmungsgleichung des Eigenkapitalmarktwertes in der Schreibweise von Inselbag/Kaufold (1997). In der solcherart charakterisierten Anwendung fungiert das Roll Back-Verfahren als Instrumentarium zur Herleitung, das heißt zur theoretischen Fundierung einer (gegebenenfalls impliziten) DCF-Bewertungsfunktion, hier Gleichung (1).

3.1.2 Roll Back-basierte Lösung der Bewertungsgleichung

In der Literatur wird das Roll Back-Verfahren nicht nur für die Herleitung von DCF-Bewertungsgleichungen eingesetzt, sondern auch für die Lösung derselben, indem die der impliziten Bewertungsfunktion, hier Gleichung (1), zugrundeliegende Roll Back-Gleichung, hier Gleichung (2), zur Lösung der impliziten Bewertungsfunktion, hier Gleichung (1), eingesetzt wird.

³² Vgl. in diesem Zusammenhang insbesondere Wilhelm (1981), S. 894 ff.; Dybvig/Ross (1989), S. 59 ff.

Diese Verwendung des Roll Back-Verfahrens findet sich insbesondere bei Schwetzler/Darijtschuk (1999), die diesbezüglich ausführen, „daß mit jeder DCF-Variante (Equity-, Entity- und APV-Ansatz) eine eigenständige Ermittlung von konsistenten Unternehmenswerten ohne Zirkularitätsproblem möglich ist. [...] Für Theoretiker und Praktiker gleichermaßen interessant dürfte das auf dem Equity-Ansatz basierende ‚Roll back‘-Verfahren sein. Es fußt auf den Theoremen von Modigliani/Miller und stellt eine analytische und implementierbare Lösung des Zirkularitätsproblems dar.“³⁴

Vollkommen analog hierzu Heitzer/Dutschmann (1999): „Es wurde eine Bewertungsformel entwickelt, mit deren Hilfe Roll Back-Gleichungen für die DCF-Ansätze formuliert wurden, die belegen, daß in der unterstellten Bewertungssituation alle DCF-Ansätze zu demselben Ergebnis kommen, wenn man eine periodenspezifische Anpassung der Eigenkapitalkosten in Abhängigkeit vom Verschuldungsgrad vornimmt. Jedes der dargestellten Verfahren kann den Unternehmenswert ohne Rückgriff auf die Ergebnisse anderer Verfahren und damit zirkularitätsfrei bestimmen.“³⁵

Der von Schwetzler/Darijtschuk vorgeschlagene anwendungsorientierte Einsatz des Roll Back-Verfahrens zur Lösung von impliziten DCF-Bewertungsfunktionen wird auch bei Baetge/Niemeyer/Kümmel (2001) diskutiert: „Für den **Nicht-Rentenfall** gibt es bei Beachtung der autonomen und der unternehmenswertorientierten Finanzierungsstrategie zwei unterschiedliche Möglichkeiten, den Unternehmenswert mit den drei Ansätzen der DCF-Verfahren zu berechnen: Einerseits kann man den Unternehmenswert ausgehend vom Bewertungsstichtag bis zur ewigen Rente progressiv durch einfache Anwendung der Bewertungsformeln der verschiedenen Ansätze der DCF-Verfahren bestimmen. Bei der **progressiven Berechnung** ergibt sich je nach gewählter Finanzierungsstrategie bei bestimmten Ansätzen der DCF-Verfahren ein Zirkularitätsproblem in den anzuwendenden Bewertungsformeln, das bei progressivem Vorgehen nicht durch formale Äquivalenzumformungen aufgelöst werden kann. [...]. Andererseits kann man den Unternehmenswert aber auch ausgehend vom zirkularitätsfrei ermittelten Unternehmenswert in der ewigen Rente Periode für Periode bis zum Bewertungszeitpunkt zurückrechnen, um den Unternehmenswert zu bestimmen (**rekursive Berechnung**). Bei der rekursiven Berechnung wird der Unternehmenswert ausgehend vom zirkularitätsfrei ermittelbaren Wert in der ewigen

³³ Vgl. in etwas anderer Schreibweise und in Bezug auf den Unternehmensgesamtwert Heitzer/Dutschmann (1999), S. 1467.

³⁴ Schwetzler/Darijtschuk (1999), S. 295.

³⁵ Heitzer/Dutschmann (1999), S. 1469.

Rente mit formalen Umformungen der Bewertungsgleichungen periodenweise rückwärts bis zum Bewertungszeitpunkt bestimmt.“³⁶

In dieser Interpretation ist das Roll Back-Verfahren als Lösungsalgorithmus für zirkularitätsbehaftete (implizite) DCF-Bewertungsgleichungen zu verstehen: Ausgehend von konkreten Unternehmensdaten werden die in die Bewertung involvierten zeitpunktbezogenen Marktwerte der gesuchten Kapitalposition mit Hilfe einer in $T - 1$ beginnenden und bis zum Bewertungszeitpunkt 0 fortschreitenden sukzessiven Rückwärtsrechnung ermittelt. Nach Durchlauf des Roll Back-Verfahrens steht das gesuchte Bewertungsergebnis in zahlenmäßiger Höhe fest.³⁷

Für eine ökonomische Würdigung des Roll Back-Verfahrens ist es zweckmäßig, zwischen dem formaltheoretischen Einsatz des Roll Back-Verfahrens zur Herleitung beziehungsweise ökonomischen Fundierung von DCF-Bewertungsgleichungen und dem anwendungsorientierten Einsatz des Verfahrens zur Ermittlung konkreter Marktwerte zu unterscheiden. Eine hierzu analoge differenzierte Betrachtung des Bewertungsproblems mit gleichzeitiger Würdigung des Bewertungsergebnisses findet sich bei Wallmeier (1999). *Im Hinblick auf die Herleitung der DCF-Bewertungsgleichungen:* „Zu beiden Finanzierungsstrategien können Bewertungsformeln nach dem APV-, dem Entity- und dem Equity-Ansatz aufgestellt werden, die zum gleichen Ergebnis führen. Allerdings kommen darin zum Teil Variablen vor, die erst bekannt sind, wenn das Bewertungsproblem schon gelöst ist. [...] Von diesem Zirkularitätsproblem sind bei deterministischem Verschuldungsgrad der APV-Ansatz und die Equity-Methode betroffen, bei deterministischem Fremdkapitalbestand der Entity-Ansatz sowie wiederum die Equity-Methode.“³⁸ *Im Hinblick auf die Lösung der DCF-Bewertungsgleichungen:* „Eine Lösung kann in solchen Fällen bekanntermaßen durch ein

³⁶ Baetge/Niemeyer/Kümmel (2001), S. 300. Fettdruck im Original.

³⁷ Wird das Roll Back-Verfahren mit iterativen Lösungsprozeduren vollzogen, dann wäre der gemäß (2) definierte zeitpunktbezogene Eigenkapitalmarktwert V_{t-1}^{EK} solange zu variieren, bis die jeweilige Gleichung erfüllt ist. Das Iterationsverfahren wird in der Literatur auch derart beschrieben, daß nicht der Eigenkapitalmarktwert, sondern der zu Marktwerten gemessene Verschuldungsgrad variiert wird. So zum Beispiel Schildbach (2000), der die iterativen Lösungsansätze als Verfahren beschreibt, „bei denen geschätzte Kapitalstrukturen so lange in die Formel zur Berechnung des Werts eines Unternehmens eingegeben werden, bis das Ergebnis der Rechnung, der Wert des Unternehmens für die Eigner (= Wert des Eigenkapitals), die geschätzte Kapitalstruktur genau bestätigt.“ [Schildbach (2000), S. 708.]. Das solcherart umgesetzte Iterationsverfahren wäre hier formal wie folgt charakterisiert: Die in der Gleichung

$$V_{t-1}^{EK} = \frac{E_0[\tilde{F}CF_t] + V_t^{EK} + V_t^{FK}}{1 + r \cdot (1 - s) \cdot v + \left(k^{EK} + (k^{EK} - r) \cdot \left(1 - \frac{r \cdot s}{1 + r} \right) \cdot \frac{v}{1 - v} \right) \cdot (1 - v)} - V_{t-1}^{FK}$$

stehende Variable v wird solange variiert, bis der sich ergebende Funktionswert V_{t-1}^{EK} die Gleichung $v = V_{t-1}^{FK} / (V_{t-1}^{EK} + V_{t-1}^{FK})$ erfüllt.

mehrstufiges Verfahren gefunden werden, das sukzessive von späteren zu früheren Perioden fortschreitet („Backwards-iteration procedure“, „Rollback-Verfahren“).³⁹ *Im Hinblick auf das Bewertungsergebnis:* „Dieser Weg führt bei deterministischem Verschuldungsgrad zur Bewertungsformel [...] des Entity-Ansatzes und bei deterministischem Fremdkapitalbestand zur Bewertungsformel [...] des APV-Ansatzes.“⁴⁰

Mit dieser letzten Feststellung wird nicht nur die Frage angesprochen, was die Erkenntnis 'das Resultat nach der WACC-Methode entspricht dem Resultat nach der APV-Methode' wert ist,⁴¹ sondern auch die Frage, was die Erkenntnis 'das Roll Back-Verfahren ermöglicht eine zirkularitätsfreie Unternehmenswertermittlung' wert ist. Folgende Fragen erscheinen in diesem Zusammenhang von Bedeutung: Ist das Verfahren für Praktiker von Nutzen? Gibt es bei Einsatz des Verfahrens für die praktische Unternehmenswertermittlung einen Erkenntnisgewinn? Bestehen rechentechnische Vorteile des Verfahrens, die einen Einsatz begünstigen könnten?

Die allgemein bekannte Identität der Bewertungsergebnisse nach dem WACC- und APV-Ansatz für gegebene Finanzierungsstrategie soll im folgenden für den hier diskutierten Fall der autonomen Finanzierung durch den Augenschein der Berechnung explizit illustriert werden. Dabei zeigt sich, daß bei geeigneter Formulierung der Roll Back-Gleichung des WACC-Ansatzes gemäß (2) das Roll Back-Verfahren nur eine von vielen Möglichkeiten darstellt, das im Sinne von impliziten Funktionen definierte Zirkularitätsproblem zu lösen. Eine ökonomische Würdigung der Ergebnisse mit Blick auf die oben aufgeworfenen Fragestellungen schließt sich an.

3.2 Allgemeine Lösungsverfahren

Gegeben ist die gemäß (2) definierte Roll Back-Gleichung des WACC-Ansatzes. Gesucht ist der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Eigenkapitalmarktwert V_0^{EK} . Eine etwas kompaktere Schreibweise von Gleichung (2) läßt sich erreichen, indem die in die Bewertung involvierten Diskontierungszinssätze $WACC_t$ wie folgt umgeformt werden:

$$(3) \quad WACC_t = k^{EK} - \frac{V_{t-1}^{TS} \cdot (1 + k^{EK}) - V_t^{TS}}{V_{t-1}^{EK} + V_{t-1}^{FK}} \quad t = 1, \dots, T$$

³⁸ Wallmeier (1999), S. 1480.

³⁹ Wallmeier (1999), S. 1480.

⁴⁰ Wallmeier (1999), S. 1480.

⁴¹ Vgl. vollkommen analog hierzu Richter (1997), S. 231 in Bezug auf den Entity- und Equity-Ansatz.

In dieser Formulierung ergibt sich der periodenbezogene Gesamtkapitalkostensatz $WACC_t$, als der um einen Abschlag verminderte Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung.⁴² Der Abschlag erfaßt dabei die von der sicheren Steuerersparnis induzierte veränderte Risikostruktur des Total Cash Flow-Zahlungsstroms. Der riskante Total Cash Flow einer Periode ergibt sich aus dem riskanten Free Cash Flow der Periode zuzüglich dem sicheren Tax Shield. Mit steigendem Tax Shield nimmt der Anteil sicherer Zahlungen am gesamten Cash Flow zu beziehungsweise der Anteil riskanter Zahlungen am gesamten Cash Flow ab.⁴³

Mit der obenstehenden Formulierung von $WACC_t$ kann die Roll Back-Gleichung des WACC-Ansatzes wie folgt geschrieben werden:

$$(4) \quad V_{t-1}^{EK} = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t] + V_t^{EK} + V_t^{FK}}{1 + WACC_t} - V_{t-1}^{FK} \quad t = 1, \dots, T$$

$$WACC_t = k^{EK} - \frac{V_{t-1}^{TS} \cdot (1 + k^{EK}) - V_t^{TS}}{V_{t-1}^{EK} + V_{t-1}^{FK}}$$

In ausgeschriebener Form erhält man:

$$V_0^{EK} = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_1] + V_1^{EK} + V_1^{FK}}{1 + k^{EK} - \frac{V_0^{TS} \cdot (1 + k^{EK}) - V_1^{TS}}{V_0^{EK} + V_0^{FK}}} - V_0^{FK}$$

$$V_1^{EK} = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_2] + V_2^{EK} + V_2^{FK}}{1 + k^{EK} - \frac{V_1^{TS} \cdot (1 + k^{EK}) - V_2^{TS}}{V_1^{EK} + V_1^{FK}}} - V_1^{FK}$$

$$\vdots$$

$$V_{T-1}^{EK} = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_T]}{1 + k^{EK} - \frac{V_{T-1}^{TS} \cdot (1 + k^{EK})}{V_{T-1}^{EK} + V_{T-1}^{FK}}} - V_{T-1}^{FK}$$

⁴² Die abschlagsorientierte Formulierung der Kapitalkosten WACC liegt auch dem Ansatz von Harris/Pringle (1985) mit unterstellter wertorientierter Finanzierung zugrunde, wenngleich ihr Ansatz durch die Diskontierung künftiger Tax Shields mit dem einheitlichen Kapitalkostensatz bei vollständiger Eigenfinanzierung „is not based on a rational argument but on 'pedagogic advantages'.“ [Löffler (1998), S. 2 mit Verweis auf Harris/Pringle (1985), S. 241.].

⁴³ Bei diesen Überlegungen geht die Aufnahme von Fremdkapital mit einer entsprechenden Ausschüttung an die Eigenkapitalgeber einher. Die Fremdkapitalmaßnahme nimmt daher keinen Einfluß auf die Höhe des zum Periodenende anfallenden Free Cash Flow. Alle Überlegungen bezüglich der Veränderung des Tax Shield beziehungsweise des ihm zugrundeliegenden Fremdkapitalbestandes sind daher stets als Substitution von Eigen- durch Fremdkapital zu verstehen, wobei die Substitution durch Aufnahme von *risikolosem* Fremdkapital mit

Es ist augenscheinlich, daß die hier diskutierte Roll Back-Gleichung ein Gleichungssystem mit T Gleichungen und T Variablen beschreibt. Die Systemvariablen sind durch V_{t-1}^{EK} , $t = 1, \dots, T$ gegeben. Die für das Einperiodenmodell noch zutreffende Aussage, das Zirkularitätsproblem werde durch eine einzige implizite Funktion charakterisiert, ist daher im Mehrperiodenmodell zu relativieren. Analog hierzu ist auch die Frage nach einer expliziten Lösung des Zirkularitätsproblems im Mehrperiodenmodell zu relativieren. Die Frage nach der expliziten Lösbarkeit des Zirkularitätsproblems zielt nunmehr auf die Lösbarkeit eines Gleichungssystems mit T Gleichungen und T Variablen ab. Im folgenden soll das solcherart beschriebene Bewertungsproblem näher untersucht werden.

Abhängige Funktionsvariablen in (4) sind $V_0^{EK}, V_1^{EK}, \dots, V_{T-1}^{EK}$. Sie sind modellendogen bestimmt. Alle anderen Variablen sind unabhängige Funktionsvariablen. Sie werden modellexogen vorgegeben. V_0^{EK} ist eine Funktion von V_0^{EK} und V_1^{EK} , V_1^{EK} ist eine Funktion von V_1^{EK} und V_2^{EK} , ..., V_{T-1}^{EK} ist schließlich eine Funktion von V_{T-1}^{EK} . In jeder Gleichung steht der gesuchte Eigenkapitalmarktwert sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung. Die Bewertungsfunktionen $V_0^{EK}, V_1^{EK}, \dots, V_{T-1}^{EK}$ sind mithin implizite Funktionen.

Um die formaltheoretische Methodologie des lösungsorientierten Roll Back-Verfahrens explizit aufzuzeigen, ist es zweckmäßig, die implizite Form einer jeden Funktion in ihre explizite Form zu überführen. Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$(5) \quad V_{t-1}^{EK} = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t] + V_t^{EK} + V_t^{FK} + V_{t-1}^{TS} \cdot (1 + k^{EK}) - V_t^{TS} - V_{t-1}^{FK} \cdot (1 + k^{EK})}{1 + k^{EK}} \quad t = 1, \dots, T$$

Dieses Gleichungssystem ist ein System von besonders einfacher Bauart. Die Einfachheit wird noch viel mehr augenscheinlich, wenn man die auf der rechten Seite stehenden abhängigen Funktionsvariablen auf die linke Seite bringt. In Matrizenschreibweise erhält man:⁴⁴

sofortiger Ausschüttung liquider Mittel in gleicher Höhe an die Eigenkapitalgeber erfolgt. Vgl. diesbezüglich auch Drukarczyk (2001), S. 215 ff.; Rudolph (1979), S. 159 f. im Kontext des CAPM.

⁴⁴ In den nachfolgenden Darstellungen zu diesem Abschnitt läuft der Zeitindex t aus Veranschaulichungsgründen nicht von $1, \dots, T$, sondern von $0, \dots, T-1$.

(6)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} V_0^{EK} \\ V_1^{EK} \\ V_2^{EK} \\ V_3^{EK} \\ \vdots \\ V_{T-2}^{EK} \\ V_{T-1}^{EK} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{T-2} \\ b_{T-1} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = -\frac{1}{1+k^{EK}}$$

$$b_t = \frac{E_0[F\tilde{C}F_{t+1}] + V_{t+1}^{FK} + V_t^{TS} \cdot (1+k^{EK}) - V_{t+1}^{TS} - V_t^{FK} \cdot (1+k^{EK})}{1+k^{EK}}$$

\mathbf{A} beschreibt die Koeffizientenmatrix, \mathbf{v} den Spaltenvektor mit den unbekanntenen Komponenten V_t^{EK} , $t=0, \dots, T-1$ und \mathbf{b} den Spaltenvektor der rechten Seite des Gleichungssystems. Die Systemmatrix \mathbf{A} ist quadratisch von der Ordnung T . Die Interpretation der rechten Seite des Gleichungssystems ergibt sich aus der linken: Das Absolutglied b_t beschreibt den auf den Zeitpunkt t bezogenen Eigenkapitalmarktwert abzüglich des mit k^{EK} um eine Periode diskontierten Eigenkapitalmarktwertes der Folgeperiode: $b_t = V_t^{EK} - V_{t+1}^{EK} \cdot (1+k^{EK})^{-1}$.

Der Formulierung des Bewertungsproblems als Gleichungssystem mit T Gleichungen und T Variablen schließt sich die Frage nach der Lösbarkeit desselben an. Die Mathematik stellt hierfür verschiedene Lösungsverfahren zur Verfügung. Die von Baetge/Niemeyer/Kümmel (2001) angesprochene progressive Lösung des Systems scheidet aus. Der Versuch einer progressiven Lösung entspricht in der hier vorgenommenen Formulierung des Bewertungsproblems als $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}$ aus mathematischer Sicht dem Versuch, eine eindeutige Lösung für *eine* Gleichung mit *zwei* Unbekannten finden zu wollen. Bei dem hier zu lösenden Gleichungssystem handelt es sich um ein inhomogenes lineares System. Die Anzahl der Gleichungen entspricht der Anzahl der Variablen. Das Gleichungssystem ist ein quadratisches (T,T) -System.

Im allgemeinen Zusammenhang mit der Lösung linearer Gleichungssysteme können verschiedene Verfahren zur Anwendung kommen. Besteht das Gleichungssystem aus mehr als zwei Gleichungen, dann empfiehlt sich eine Lösung mit Hilfe eines Eliminationsverfahrens. Liegt zudem ein quadratisches System mit eindeutig bestimmter Lösung vor, dann gibt es mittels inverser Matrizen und Determinanten noch zwei weitere Lösungsmethoden.

Nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren besteht der Lösungsweg aus drei Teilen:⁴⁵
1. Der Vorwärtselimination an der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$. 2. Einer Lösbarkeitsentscheidung. 3. Der Rückwärtssubstitution. Im Wege der Vorwärtselimination wird die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $(M|\mathbf{d})$ überführt, mit M in sogenannter Zeilenstufenform. Die Lösbarkeitsentscheidung betrifft die Frage nach den Lösungsmöglichkeiten des Systems. Zwei Fälle sind zu unterscheiden: Fall I: Das System ist lösbar. Fall II: Das System ist widersprüchlich und somit unlösbar. Eine Antwort auf die Lösbarkeitsentscheidung kann unmittelbar aus $(M|\mathbf{d})$ abgelesen werden. Ist das Gleichungssystem lösbar, dann können die Lösungswerte der Reihe nach von unten nach oben durch Rückwärtssubstitution bestimmt werden.

Wie ist das hier zur Diskussion stehende quadratische Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}$ zu würdigen? Die Vorwärtselimination ist für dieses Gleichungssystem ohne Bedeutung. Die Koeffizientenmatrix A ist eine obere normierte Dreiecksmatrix. Die von dem Gauß'schen Lösungsverfahren angestrebte Struktur des Gleichungssystems liegt bereits vor. Im Hinblick auf die Lösbarkeitsentscheidung sind folgende Zusammenhänge von Bedeutung: Ist A quadratisch und regulär (A ist invertierbar), oder äquivalent $\rho(A) = T$, oder äquivalent $|A| \neq 0$, dann hat das inhomogene Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung.⁴⁶ Der Ausdruck $\rho(A)$ beschreibt dabei den Rang und der Ausdruck $|A|$ die Determinante der (T, T) -Matrix A .

Eine obere Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn sämtliche Elemente auf der Hauptdiagonalen von Null verschieden sind.⁴⁷ Der Rang der Matrix A wird durch die Anzahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente der aus A mittels Gauß-Elimination entstandenen Zeilenstufenmatrix definiert.⁴⁸ Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt aus den Diagonalelementen.⁴⁹ Die hier betrachtete Koeffizientenmatrix A ist mithin invertierbar, besitzt den Rang $\rho(A) = T$ und den Determinantenwert $|A| = 1$. Das

⁴⁵ Vgl. Meyberg/Vachenauer (1995), S. 259 f..

⁴⁶ Vgl. Meyberg/Vachenauer (1995), S. 271, 304, Zurmühl/Falk (1992), S. 115, 135.

⁴⁷ Vgl. Meyberg/Vachenauer (1995), S. 272.

⁴⁸ Vgl. Meyberg/Vachenauer (1995), S. 259.

⁴⁹ Vgl. Meyberg/Vachenauer (1995), S. 303.

Gleichungssystem $A \cdot v = b$ besitzt eine eindeutige Lösung. Diese Lösung erhält man im Gauß'schen Lösungsverfahren durch Rückwärtssubstitution, indem ausgehend von der $T - 1$ Gleichung die Werte von $V_{T-2}^{EK}, V_{T-3}^{EK}, \dots, V_0^{EK}$ durch rekursives Einsetzen der Variablenwerte berechnet werden. In der Dreiperiodenbetrachtung beispielsweise, wird der durch V_2^{EK} definierte Zahlenwert in die Bestimmungsgleichung von V_1^{EK} eingesetzt, sodann der Wert von V_1^{EK} berechnet und dieser Wert wiederum in die Bestimmungsgleichung von V_0^{EK} eingesetzt, was schließlich zu dem gesuchten Eigenkapitalmarktwert von V_0^{EK} führt.

Es ist augenscheinlich, daß die in der Bewertungsliteratur als Roll Back-Verfahren bezeichnete Lösungsprozedur für Zirkularitätsprobleme nichts weiter ist als die im Rahmen des Gauß'schen Lösungsverfahrens zur Anwendung kommende Rückwärtssubstitution.

Der Algorithmus zur Auflösung des Gleichungssystems $A \cdot v = b$ sollte so angelegt werden, daß er unabhängig vom gewählten Planungshorizont T jederzeit auf Abruf wiederholbar ist, ohne daß bei einer neu hinzutretenden rechten Seite des Systems die aufwendige Rückwärtssubstitution aufs neue durchgeführt werden muß. Diesbezügliche Lösungsansätze werden von der Matrizen- und Determinantenlehre bereitgestellt.

Jede Matrixgleichung $A \cdot v = b$ mit einer invertierbaren (T, T) -Matrix A besitzt die eindeutig bestimmte Lösung $v = A^{-1} \cdot b$, wobei A^{-1} die inverse Matrix von A bezeichnet. Die Inverse einer normierten oberen Dreiecksmatrix ist dabei ihrerseits eine normierte obere Dreiecksmatrix.⁵⁰ Zur konkreten Berechnung der Inversen kann beispielsweise das Gauß-Jordan-Verfahren herangezogen werden.⁵¹ Hierzu wird die zu invertierende Matrix A durch Hinzufügen einer typengleichen Einheitsmatrix E auf $(A | E)$ erweitert und im Wege der sogenannten Rückwärtselimination von unten nach oben durch elementare Zeilenumformungen gemäß der Vorschrift $z_i - \alpha \cdot z_{i+1}$ derart umgeformt, daß sich aus der Matrix A die Einheitsmatrix E entwickelt. Die Inversion von A ist geradezu geschenkt. Man erhält durch Rückwärtselimination gemäß $z_i - \alpha \cdot z_{i+1}$ die folgende allgemeine Lösung für A^{-1} .⁵²

⁵⁰ Vgl. Zurmühl/Falk (1992), S. 69.

⁵¹ Vgl. Meyberg/Vachenauer (1995), S. 292 f..

⁵² Verifikation durch $E = A \cdot A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (-\alpha)^1 & (-\alpha)^2 & (-\alpha)^3 & (-\alpha)^4 & (-\alpha)^5 & \dots & (-\alpha)^{T-1} \\ 0 & 1 & (-\alpha)^1 & (-\alpha)^2 & (-\alpha)^3 & (-\alpha)^4 & \dots & (-\alpha)^{T-2} \\ 0 & 0 & 1 & (-\alpha)^1 & (-\alpha)^2 & (-\alpha)^3 & \dots & (-\alpha)^{T-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (-\alpha)^1 & (-\alpha)^2 & \dots & (-\alpha)^{T-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (-\alpha)^1 & \dots & (-\alpha)^{T-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-\alpha)^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und für den Lösungsvektor \mathbf{v} :

$$(7) \quad \mathbf{v} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & (-\alpha)^1 & (-\alpha)^2 & (-\alpha)^3 & (-\alpha)^4 & (-\alpha)^5 & \dots & (-\alpha)^{T-1} \\ 0 & 1 & (-\alpha)^1 & (-\alpha)^2 & (-\alpha)^3 & (-\alpha)^4 & \dots & (-\alpha)^{T-2} \\ 0 & 0 & 1 & (-\alpha)^1 & (-\alpha)^2 & (-\alpha)^3 & \dots & (-\alpha)^{T-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (-\alpha)^1 & (-\alpha)^2 & \dots & (-\alpha)^{T-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (-\alpha)^1 & \dots & (-\alpha)^{T-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-\alpha)^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{T-2} \\ b_{T-1} \end{pmatrix}$$

„Die Lösung von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix ist besonders dann empfehlenswert, wenn Systeme mit stets der gleichen linken Seite sich nur in den rechten Seiten unterscheiden. In solchen Fällen braucht nur einmal die inverse Matrix bestimmt zu werden; mit ihr werden dann [...] die verschiedenen rechten Spaltenvektoren multipliziert.“⁵³ In den praktischen Anwendungen zur Unternehmensbewertung reicht es prinzipiell aus, die Koeffizientenmatrix A und den Spaltenvektor \mathbf{b} der rechten Seite des Gleichungssystems zu spezifizieren. Der Lösungsvektor \mathbf{v} kann dann mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes, beispielsweise mit EXCEL, oder eines halbwegs besseren Taschenrechners mit Inversenfunktion per Maus-Click beziehungsweise Knopfdruck ermittelt werden.

Im Zusammenhang mit der Lösung linearer Gleichungssysteme wird nicht nur das Rechnen auf Abruf (Serienrechnung) gefordert, sondern auch ein zielkongruentes Vorgehen im Hinblick auf die Reihenfolge der Bestimmung der gesuchten Variablen: „Die Reihenfolge der interessierenden Unbekannten legt die Reihenfolge der Vorgehensweise fest.“⁵⁴ In der praktischen Anwendung sind häufig nicht alle, sondern nur einige wenige oder gar nur eine Unbekannte des Gleichungssystems gesucht. In diesem Fall wird man die Berechnung auf die gesuchten Größen beschränken wollen. Im Hinblick auf die Unternehmenswertbestimmung im Sinne der Ermittlung eines als Punktwert definierten Entscheidungswertes wird der auf den Bewertungszeitpunkt 0 bezogene Eigenkapitalmarktwert V_0^{EK} gesucht. Die explizite

⁵³ Vogt (1996), S. 82.

⁵⁴ Zurmühl/Falk (1992), S. 117.

Bestimmung der durch V_t^{EK} , $t=1,\dots,T-1$ beschriebenen Entwicklung des erwarteten Eigenkapitalmarktwertes im Zeitablauf hat nur sekundäre Bedeutung.

Ein auf diese Problemstellung zugeschnittener Algorithmus, der die Berechnung einzelner Unbekannter erlaubt, ohne die Werte der anderen Systemvariablen explizit bestimmen zu müssen, ist durch die Determinantenmethode (Cramer-Regel) gegeben. Hiernach lassen sich die Lösungen des linearen quadratischen Gleichungssystems $A \cdot v = b$ mit invertierbarer Matrix A wie folgt darstellen:⁵⁵

$$(8) \quad V_t^{EK} = \frac{|A_t|}{|A|}, \quad t = 0, \dots, T-1$$

Die Cramer'sche Regel stellt die Lösungswerte von V_t^{EK} , $t = 0, \dots, T-1$ als Quotienten zweier Determinanten dar. Die Nennerdeterminante $|A|$ bezeichnet die Determinante der Koeffizientenmatrix A , die Zählerdeterminante $|A_t|$ die Determinante der Matrix A_t , wobei die Matrix A_t aus A dadurch hervorgeht, daß die t -Spalte von A durch den Spaltenvektor b der rechten Seite des Gleichungssystems ersetzt wird. Die Koeffizientenmatrix A besitzt den Determinantenwert $|A| = 1$. Gesucht wird der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Eigenkapitalmarktwert V_0^{EK} . Nach der Cramer'schen Regel erhält man:

$$(9) \quad V_0^{EK} = |A_0| = \begin{vmatrix} b_0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{T-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ b_{T-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Eine Berechnung von $|A_0|$ kann nach dem Entwicklungssatz für Determinanten erfolgen. Der Determinantenwert $|A_0|$ kann auch derart bestimmt werden, indem die Matrix A_0 durch Rückwärtselimination von unten nach oben durch elementare Zeilenumformungen gemäß der Vorschrift $z_t - \alpha \cdot z_{t+1}$ auf eine untere Dreiecksmatrix zurückgeführt wird. Der Determinantenwert der solcherart entwickelten Matrix ist gleich dem Produkt aus den Diagonalelementen. Für einen Planungshorizont von T erhält man nach der Determinantenmethode die folgende allgemeine Lösung des Bewertungsproblems:

⁵⁵ Vgl. Meyberg/Vachenaer (1995), S. 307.

$$(10) \quad V_0^{EK} = |A_\theta| = \sum_{t=0}^{T-1} (-\alpha)^t \cdot b_t = b_0 - \alpha \cdot b_1 + \alpha^2 \cdot b_2 - \alpha^3 \cdot b_3 + \alpha^4 \cdot b_4 - + \dots + (-\alpha)^{T-1} \cdot b_{T-1}$$

Die praktische Lösung des mittels Determinanten beschriebenen Bewertungsproblems kann vollkommen analog zu der Formulierung als Matrizenkalkül durch alleinige Spezifikation von A_θ erfolgen. Die konkrete Berechnung des Determinantenwertes $|A_\theta|$ und mit ihm des Eigenkapitalmarktwertes V_0^{EK} kann dann problemlos mit Hilfe von EXCEL oder eines Taschenrechners mit Determinantenfunktion durchgeführt werden.

Es erscheint müßig bei den heute verfügbaren EDV-Fazilitäten darüber zu diskutieren, welches Lösungsverfahren, Lösung mittels inverser Matrizen oder Lösung mittels Determinanten, das effizientere darstellt. In jedem Fall sollte sich die Implementierung beider Algorithmen schneller und vermutlich auch weniger fehleranfällig erweisen, als es dies bei dem durch Rückwärtssubstitution charakterisierten Roll Back-Verfahren der Fall ist.

3.3 Bewertungsgleichung im Rentenmodell

Im Modell der Kapitalisierung einer unendlichen Zahlungsreihe mit konstanten erwarteten Free Cash Flows $E_0[\tilde{F}\tilde{C}F_t] = E_0[\tilde{F}\tilde{C}F]$, $t = 1, 2, \dots$ und konstanten Fremdkapitalbeständen $V_t^{FK} = V_0^{FK}$, $t = 1, 2, \dots$ im Zeitablauf erhält man eine ebenfalls konstante Entwicklung der zeitpunktbezogenen Marktwerte künftiger Tax Shields $V_t^{TS} = V_0^{TS} = s \cdot V_0^{FK}$, $t = 1, 2, \dots$ sowie der erwarteten Eigenkapitalmarktwerte $V_t^{EK} = V_0^{EK}$, $t = 1, 2, \dots$ im Zeitablauf. Die Bestimmungsgleichung des Eigenkapitalmarktwertes in der Schreibweise des WACC-Ansatzes ergibt sich in diesem Fall zu:

$$(11) \quad V_0^{EK} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F]}{(1+WACC)^t} - V_0^{FK} = \frac{E_0[\tilde{F}\tilde{C}F]}{WACC} - V_0^{FK}$$

$$WACC = r \cdot (1-s) \cdot \frac{V_0^{FK}}{V_0^{EK} + V_0^{FK}} + k^{EK,F} \cdot \frac{V_0^{EK}}{V_0^{EK} + V_0^{FK}}$$

$$k^{EK,F} = k^{EK} + (k^{EK} - r) \cdot (1-s) \cdot \frac{V_0^{FK}}{V_0^{EK}}$$

Bei Formulierung der WACC in der Schreibweise von Modigliani/Miller (1963), erhält man:⁵⁶

$$(12) \quad V_0^{EK} = \frac{E_0[F\tilde{C}F]}{k^{EK} \cdot \left(1 - s \cdot \frac{V_0^{FK}}{V_0^{EK} + V_0^{FK}}\right)} - V_0^{FK}$$

Im Rentenmodell ergibt sich der Marktwert des Eigenkapitals V_0^{EK} als Barwert einer ewigen Rente abzüglich des modellexogen in absoluter Höhe vorgegebenen Fremdkapitalbestandes im Bewertungszeitpunkt. Die Rentenhöhe wird durch den Erwartungswert der einperiodigen Zahlungen $E_0[F\tilde{C}F]$, der Diskontierungszinssatz durch WACC bestimmt. Die abhängige Funktionsvariable, der gesuchte Eigenkapitalmarktwert V_0^{EK} , steht sowohl auf der linken als auch rechten Seite der Gleichung. Die Bewertungsgleichung ist mithin eine implizite Funktion. Die implizite Form der Funktion läßt durch Auflösen nach V_0^{EK} in ihre explizite Form überführen.⁵⁷

$$(13) \quad V_0^{EK} = \frac{E_0[F\tilde{C}F]}{k^{EK}} + V_0^{FK} \cdot s - V_0^{FK}$$

Im Ergebnis erhält man die Bestimmungsgleichung des Eigenkapitalmarktwertes in der Schreibweise des APV-Ansatzes.

Das Bewertungsergebnis des Rentenmodells läßt sich auch als Grenzwert der in diesem Beitrag für das Mehrperiodenmodell entwickelten Bewertungsfunktionen ableiten. Unter den Annahmen des Rentenmodells ergeben sich die in die Bewertung involvierten Absolutglieder der rechten Seite von (6) zu:

$$(14) \quad b_0 = \dots = b_t = \dots = \bar{b} = \frac{E_0[F\tilde{C}F] + V_0^{FK} \cdot k^{EK} \cdot (s-1)}{1 + k^{EK}}$$

Eine Lösung nach der Determinantenmethode führt zu:

⁵⁶ Vgl. etwa Inselbag/Kaufold (1997), S. 118, Fußnote 6, Drukarczyk/Honold (1999), S. 336, Schwetzler/Darijschuk (1999), S. 301, Wallmeier (1999), S. 1478.

⁵⁷ Vgl. Schwetzler/Darijschuk (1999), S. 301.

$$(15) \quad V_0^{EK} = |A_0| = \sum_{t=0}^{\infty} (-\alpha)^t \cdot b_t = \bar{b} - \alpha \cdot \bar{b} + \alpha^2 \cdot \bar{b} - \alpha^3 \cdot \bar{b} + \alpha^4 \cdot \bar{b} - + \dots$$

$$= \bar{b} \cdot (1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - + \dots)$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck beschreibt eine binomische Reihe, die für $|\alpha| < 1$ absolut konvergiert.⁵⁸

$$(16) \quad V_0^{EK} = |A_0| = \bar{b} \cdot (1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - + \dots) = \bar{b} \cdot \frac{1}{1 + \alpha}$$

Werden die durch α und \bar{b} beschriebenen Ausdrücke in diese Gleichung eingesetzt, dann erhält man wiederum die Bestimmungsgleichung des Eigenkapitalmarktwertes in der Schreibweise des APV-Ansatzes:

$$(17) \quad V_0^{EK} = |A_0| = \bar{b} \cdot \frac{1}{1 + \alpha} = \frac{E_0[F\tilde{C}F]}{k^{EK}} + V_0^{FK} \cdot s - V_0^{FK}$$

Die explizite Bewertungsfunktion des APV-Ansatzes läßt sich, wie oben gezeigt, durch einfache algebraische Umformungen in die implizite Bewertungsfunktion des WACC-Ansatzes überführen.

4. Ökonomische Würdigung

Der formaltheoretischen Würdigung des Roll Back Verfahrens schließt sich die ökonomische an. Im Mittelpunkt der folgenden Betrachtung stehen dann auch weniger die konkreten Lösungswerte (Zahlenwerte) von V_{t-1}^{EK} , $t = 1, \dots, T$ als vielmehr die Struktur der Lösungsmenge.

Gegeben ist das Gleichungssystem $A \cdot v = b$. Eine Lösung mittels inverser Matrizen führt zu $v = A^{-1} \cdot b$. Das Produkt auf der rechten Seite der Gleichung $v = A^{-1} \cdot b$ beschreibt einen Spaltenvektor, dessen Komponenten durch einfache Umformungen wie folgt geschrieben werden können:

⁵⁸ Vgl. Fichtenholz (1974), S. 384 ff..

$$\begin{aligned}
V_0^{EK} &= \frac{E_0[F\tilde{C}F_1]}{1+k^{EK}} + \frac{E_0[F\tilde{C}F_2]}{(1+k^{EK})^2} + \dots + \frac{E_0[F\tilde{C}F_T]}{(1+k^{EK})^T} + V_0^{TS} - V_0^{FK} \\
V_1^{EK} &= \frac{E_0[F\tilde{C}F_2]}{1+k^{EK}} + \frac{E_0[F\tilde{C}F_3]}{(1+k^{EK})^2} + \dots + \frac{E_0[F\tilde{C}F_T]}{(1+k^{EK})^{T-1}} + V_1^{TS} - V_1^{FK} \\
&\vdots \\
V_{T-1}^{EK} &= \frac{E_0[F\tilde{C}F_T]}{1+k^{EK}} + V_{T-1}^{TS} - V_{T-1}^{FK}
\end{aligned}$$

Die solcherart formulierte Systemlösung beschreibt die Lösung von $A \cdot v = b$ in der Schreibweise des APV-Ansatzes. Dieser Zusammenhang dokumentiert die bekannte Identität von WACC- und APV-Ansatz für gegebene Finanzierungsstrategie.

Was sind nun die Unterschiede zwischen dem WACC- und dem APV-Ansatz? Der Rekurs auf das Bewertungsergebnis als Abgrenzungskriterium ist wenig hilfreich. Beide Methoden liefern gleiche Marktwerte. Beide Methoden lassen sich analytisch ineinander überführen. Im Hinblick auf die Identität der Bewertungsergebnisse für gegebene Finanzierungsstrategie ist Drukarczyk/Honold (1999) uneingeschränkt beizupflichten, wenn sie diesbezüglich feststellen: „Die betrachteten Umformungen schieben [...] immer die gleichen Botschaften hin und her.“⁵⁹

Mit der Frage nach der Ergebnisidentität der Methoden wird auch die in der Literatur diskutierte Frage nach der theoretischen Fundierung des WACC-Ansatzes angesprochen. Stellvertretend für jene Autoren, die dem WACC-Ansatz keine eigenständige Erklärungskraft beimessen, soll hier Hering (1999) zu Wort kommen: „Während sich der APV-Ansatz [...] immerhin auf ein anerkanntes finanzierungstheoretisches Modell stützt (MODIGLIANI/MILLER), schwebt der WACC-Ansatz in einem beinahe theorielosen Raum, jedenfalls dann, wenn er praxisorientiert und nicht bloß als überflüssige APV-Tautologie interpretiert wird. [...] Angesichts der Umständlichkeit, Widersprüchlichkeit und mangelnden theoretischen Fundierung des WACC-Ansatzes erstaunt es, daß viele Autoren und Unternehmensberater ausgerechnet diese DCF-Variante zu präferieren scheinen.“⁶⁰

Nach der hier vertretenen Problemsicht sind die verschiedenen DCF-Varianten im Hinblick auf eine theoretisch gestützte Lösung im Sinne einer eigenständigen Ableitung der Bewertungsgleichungen wesentlich robuster als allgemein vermutet wird. Die Aussagen von Hering (1999) sind jedenfalls dann zu relativieren, wenn die Bewertungsmodalitäten logisch korrekt formuliert, die Prämissen der verschiedenen DCF-Varianten explizit offengelegt und

⁵⁹ Drukarczyk/Honold (1999), S. 335.

adäquate Annahmen über die Preisbildung am Kapitalmarkt getroffen werden. Für eine periodische Anwendung des statischen CAPM zur Herleitung der DCF-Bewertungsformeln sind insbesondere geeignete Annahmen bezüglich der Ausprägung des stochastischen Free Cash Flow-Prozesses, der Entwicklung des Marktpreises des Risikos und der Entwicklung des risikolosen Zinssatzes im Zeitablauf erforderlich.⁶¹ Die Ergebnisidentität der verschiedenen DCF-Methoden ist letztendlich auf die Existenz eines linearen Preisfunctionals zurückzuführen.⁶² Die Linearität des Preisfunctionals impliziert die Wertadditivität der Bewertungsfunktion. Franke/Hax (1999) stellen in diesem Zusammenhang folgendes fest: „Selbst wenn es Belastungen wie Steuern und Insolvenzkosten gibt, die von der Finanzierungsweise abhängen, geht Wertadditivität nicht notwendig verloren. Optimal ist dann die Finanzierungsweise, die den Marktwert dieser Belastungen minimiert. Wenn allerdings Transaktions- und Informationskosten bestehen, so geht Wertadditivität im allgemeinen verloren.“⁶³ Diese Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Existenz einer wertadditiven Bewertungsfunktion und der Existenz finanzierungsabhängiger Unternehmenssteuern wird von Breuer (1998) folgendermaßen präzisiert: „Zum Zwecke der Maximierung des Unternehmenswertes wird es damit erforderlich, den **Marktwert** der Auszahlungen an den **Fiskus** und im Rahmen unternehmerischer Insolvenz durch geeignete Finanzierungsmaßnahmen zu **minimieren**. Um mit Hilfe dieses Gedankens zu Empfehlungen für optimale unternehmerische Finanzierungsentscheidungen zu gelangen, ist als erstes zu prüfen, ob die Existenz von Steuern und 'Insolvenzkosten' mit der Annahme wertadditiver Marktbewertung sowie mit der Orientierung finanzwirtschaftlicher Entscheidungen am Kriterium der Marktwertmaximierung vereinbar ist. In der Tat müssen sich hierbei **keinerlei Widersprüche** ergeben, denn die Wertadditivität von Marktbewertungsfunktionen und die Zielsetzung der Marktwertmaximierung erfordern zu ihrer Gültigkeit lediglich die Möglichkeit **friktionsfreien Sekundärmarkthandels** von Finanzierungstiteln bei allgemeinem **Mengenanpasserverhalten**.“⁶⁴ Bei Existenz einer finanzierungsabhängigen Unternehmenssteuer vermag dann die Finanzierungsform zwar den Gesamtmarktwert des Zahlungsstroms zu verändern – die Höhe des Fremdkapitalbestandes beeinflusst die Höhe zusätzlicher Cash Flows in Form von Tax Shields – die Eigenschaft der Wertadditivität für gegebene Finanzierungsform bleibt dennoch bestehen.⁶⁵

⁶⁰ Hering (1999), S. 150 f.

⁶¹ Vgl. Abschnitt 1.2 und die dort angegebene Literatur. Charakteristisch für das Roll Back-Verfahren mit CAPM-basierter Marktwertentwicklung ist der von Miles/Ezzell (1985) entwickelte Ansatz für den Fall der wertorientierten Finanzierung im APV-Ansatz.

⁶² Vgl. hierzu insbesondere Wilhelm (1981), S. 894 ff. im Kontext des CAPM; Dybvig/Ross (1989), S. 59 ff.. Zu einer kritischen Diskussion der Arbitragefreiheits- und Gleichgewichtsbedingungen der Kapitalmarkttheorie vgl. Loistl (1990) und die dort angegebene Literatur.

⁶³ Franke/Hax (1999), S. 349.

⁶⁴ Breuer (1998), S. 90 f.. Fettdruck im Original. Vgl. auch Wilhelm (1983b), S. 527 ff..

⁶⁵ Bleiben Insolvenzkosten unberücksichtigt, dann ist im Modell vollständige Fremdfinanzierung optimal, da hierdurch der Unternehmensgesamtwert durch den Steuervorteil aus der Abzugsfähigkeit von Fremdkapitalzinsen maximal wird. „An diesem Modellergebnis ist nicht zu bemängeln, daß es dem Augenschein widerspricht. Dem

Hiernach erscheint es ungerechtfertigt, den WACC-Ansatz als 'theorielos' beziehungsweise den APV-Ansatz als 'theoretisch fundierter' zu bezeichnen. Vielmehr erzwingt die Linearität des herangezogenen Preisfunktionalis die Identität der Bewertungsergebnisse.

Unterschiede im Bewertungsergebnis von WACC- und APV-Ansatz sind nicht zu verzeichnen. Gibt es Unterschiede im Berechnungsaufwand? Vor dem Hintergrund der heute verfügbaren Rechner-Fazilitäten sollten alle DCF-Methoden im Hinblick auf ihren numerischen Berechnungsaufwand als gleichwertig einzustuft werden können. So zum Beispiel auch Husmann/Kruschwitz/Löffler (2001a) in Bezug auf die Bestimmung einer Lösung mittels Iteration: „Kein praktisch tätiger Unternehmensbewerter [...] verzichtet heutzutage darauf, seine Berechnungen mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms zu erledigen. Wenn aber eine derartige Anwendungssoftware zur Verfügung steht, dann bewältigt man das als so schwierig hingestellte Iterationsverfahren mithilfe eines Maus-Clicks innerhalb eines Augenblicks.“⁶⁶

Gibt es Unterschiede in der Benutzerfreundlichkeit der Methoden? Die Frage nach der Benutzerfreundlichkeit von WACC- und APV-Ansatz betrifft einerseits die Frage nach dem Implementierungsaufwand beider Algorithmen, andererseits die Frage nach der Transparenz und Nachvollziehbarkeit der Methoden. Für den hier betrachteten Fall der autonomen Finanzierung wurden mit Hilfe von inversen Matrizen und Determinanten zwei dem Roll Back-Verfahren im Ergebnis gleichwertige Lösungsmethoden vorgestellt. Eine Lösung mittels Matrizen und Determinanten kann unmittelbar von einem Tabellenkalkulationsprogramm übernommen werden. Hierzu sind lediglich die in der Bewertung involvierten Matrizen und Vektoren zu erfassen. Die konkrete Berechnung der gesuchten Variablenwerte bleibt dann dem Rechner vorbehalten. Für eine Anwendung des Roll Back-Verfahrens ist die Gauß'sche Rückwärtssubstitution zu implementieren. Für die Berechnung des Unternehmenswertes nach dem APV-Ansatz, sind die erwarteten Free Cash Flows und die sicheren Tax Shields künftiger Perioden auf den Bewertungszeitpunkt zu diskontieren. In der Praxis der Unternehmensbewertung werden die jeweiligen Lösungsalgorithmen im Allgemeinen nur einmal implementiert: Das Bewertungsprozedere wird standardisiert. Aus diesem Blickwinkel

Augenschein widersprechen Modelleinsichten häufig selbst dann, wenn sie in statistisch sinnvollen Tests nicht widerlegt, sondern vorläufig bestätigt worden sind. An diesem Modellergebnis ist auszusetzen, daß es in folgenden Widerspruch führt: Wie soll der Marktwert von Aktien einer Unternehmung maximiert werden, wenn der optimale Verschuldungsgrad 100% beträgt? Hierbei werden doch gar keine Anteilsrechte ausgegeben, die eine ergebnisabhängige Vergütung erbringen. Wie soll sich ein Konkurrenzgleichgewichtspreis für Restbetragsansprüche bilden, ohne daß Restbetragsansprüche als Marktgegenstand des Kapitalmarkts existieren? [...] Im Unterschied zu dem Ergebnis eines optimalen Verschuldungsgrades von 100% ist die Irrelevanzthese nicht sinnlos; denn die Einsicht, daß jeder Verschuldungsgrad den Marktwert der Aktien maximiert, läßt schließlich Eigenfinanzierung zu.“ [Schneider, D. (1992), S. 557].

⁶⁶ Husmann/Kruschwitz/Löffler (2001a), S. 279.

heraus sollte die Frage nach dem Implementierungsaufwand der Methoden in den Hintergrund treten. Die Frage nach der Transparenz und Nachvollziehbarkeit der Bewertungsmethoden ist nur schwer zu beantworten. Sie hängt im wesentlichen von dem konkreten Kenntnisstand des Bewertenden ab. Der mit der Materie weniger vertraute Anwender wird für die hier unterstellte Finanzierungsstrategie im Allgemeinen dem APV-Ansatz mehr Transparenz und Nachvollziehbarkeit beimessen als dem WACC-Ansatz.

Im Hinblick auf die Unterscheidbarkeit von WACC- und APV-Ansatz stellt sich nicht zuletzt die folgende Frage: *Gibt es Unterschiede im ökonomischen Zugang beider Methoden?* In der Regel bringen unterschiedliche ökonomische Zugänge auch unterschiedliche Datenqualitäten mit sich. Die Frage nach dem ökonomischen Zugang beider Methoden ist eng verknüpft mit der Frage nach der Dekomposition oder Aggregation der in der Bewertung involvierten Zahlungsströme. Eine Bewertung nach der Entity-Methode (TCF-/WACC-Ansatz) impliziert grundsätzlich eine Bewertung künftiger Total Cash Flows. Der Total Cash Flow einer Periode ergibt sich aus dem Free Cash Flow der Periode zuzüglich der Steuerersparnis aus der Abzugsfähigkeit von Fremdkapitalzinsen (Tax Shield). Die Bewertungsformel des WACC-Ansatzes mit unterstellter autonomer Finanzierung ergibt sich dabei durch entsprechende Umformulierung der Bewertungsgleichung des TCF-Ansatzes. Nach dem APV-Ansatz erfolgt eine dekompositionierte Bewertung künftiger Total Cash Flows, indem der Zahlungsstrom aus riskanten Total Cash Flows in einen Zahlungsstrom aus riskanten Free Cash Flows und einen Zahlungsstrom aus sicheren Tax Shields zerlegt wird.

Mit der Frage nach der Dekomposition oder Aggregation der in der Bewertung involvierten Zahlungsströme werden grundsätzlich auch folgende Sachverhalte angesprochen. *Erstens*: Hat die Zerlegung eines Gesamtzahlungsstroms in Teilzahlungströme einen Einfluß auf den als Summe von Einzelbarwerten definierten Gesamtmarktwert des Zahlungsstroms? *Zweitens*: Hat die Zerlegung eines Gesamtzahlungsstroms in Teilzahlungströme einen Einfluß auf die Wertbeiträge einzelner Cash Flows zum Gesamtmarktwert des Zahlungsstroms?

Bei wertadditiver Marktbewertungsfunktion gilt der bekannte Zusammenhang: „Wird ein Zahlungsstrom in mehrere Teilströme additiv zerlegt, dann ist der Marktwert des Zahlungsstroms gleich der Summe der Marktwerte der Teilströme.“⁶⁷ Hiernach ist der Marktwert eines Zahlungsstroms aus riskanten Total Cash Flows (TCF-/WACC-Ansatz) gleich dem Marktwert eines Zahlungsstroms aus riskanten Free Cash Flows zuzüglich dem Marktwert eines Zahlungsstroms aus sicheren Tax Shields (APV-Ansatz).

⁶⁷ Franke/Hax (1999), S. 348.

APV- und WACC-Ansatz stellen die auf den Zeitpunkt 0 bezogenen Wertbeiträge künftiger Cash Flows zum Gesamtmarktwert des Zahlungsstroms jeweils anders dar. Die Bestimmungsgleichung des Eigenkapitalmarktwertes nach dem APV-Ansatz lautet:

$$(18) \quad V_0^{EK} = \sum_{t=1}^T \frac{E_0[\tilde{FCF}_t]}{(1+k^{EK})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{TS_t}{(1+r)^t} - V_0^{FK}$$

Der Marktwert künftiger Free Cash Flows wird in der Terminologie der Unternehmensbewertung üblicherweise als Marktwert des unverschuldeten Unternehmens bezeichnet. Unter bestimmten, hier nicht näher spezifizierten Bedingungen, ergibt sich im Modell ein für alle Perioden konstanter Diskontierungszinssatz zur Bewertung künftiger Free Cash Flows. Dieser Diskontierungszinssatz wird entsprechend als Kapitalkosten des unverschuldeten Unternehmens bezeichnet. Die künftigen Tax Shields sind in dem hier diskutierten Modell mit autonomer Finanzierung und risikolosem Fremdkapital im Bewertungszeitpunkt mit Sicherheit bekannt. Sie werden demzufolge mit dem risikolosen Zinssatz diskontiert. Die Summe aus dem Marktwert des unverschuldeten Unternehmens und dem Marktwert künftiger Tax Shields beschreibt den Marktwert des Gesamtkapitals. Wird der im Bewertungszeitpunkt gehaltene Fremdkapitalbestand vom Unternehmensgesamtwert subtrahiert, dann erhält man den Marktwert des Eigenkapitals.

Die Bewertungsformel des APV-Ansatzes ist einer unmittelbaren ökonomischen Interpretation zugänglich. Die in der APV-Bewertungsgleichung stehenden periodenbezogenen Summanden geben jenen Wert der periodenbezogenen Cash Flows (riskanter Free Cash Flow zuzüglich sicherer Tax Shield) an, der ihnen bei wertadditiver Marktbewertung zukommen würde. Wollten die Eigenkapitalgeber diesen Cash Flow im Bewertungszeitpunkt abtreten, so würden sie dafür den Preis $E_0[\tilde{FCF}_t] \cdot (1+k^{EK})^{-t} + TS_t \cdot (1+r)^{-t}$ verlangen. Hiermit einhergehend kann man unmittelbar erkennen, wie sich der Unternehmensgesamtwert verändert, wenn sich ein erwarteter Cash Flow in seiner Höhe verändert, oder gar zur Gänze wegfällt. Diese Eigenschaft der Bewertungsfunktion erlangt insbesondere dann Bedeutung, wenn der Bewertungszweck auf die Ermittlung von Marktwerten für die Fundamentalanalyse oder für die wertorientierte Unternehmensführung abzielt.⁶⁸

Die hier diskutierten Zusammenhänge gelten nicht mehr für den WACC-Ansatz. Die periodenspezifischen Kapitalkosten WACC sind zwar einer ökonomischen Interpretation zugänglich, die mit ihrer Hilfe ermittelten Wertbeiträge einzelner Cash Flows zum Unter-

nehmensgesamtwert geben jedoch nicht mehr jene Werte wieder, die ihnen bei wertadditiver Marktbewertung zukommen würde.

Eine ökonomische Interpretation der periodenspezifischen WACC kann unmittelbar mit Hilfe der dem Ansatz zugrundeliegenden Roll Back-Gleichung gegeben werden:

$$(2) \quad V_{t-1}^{EK} = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t] + V_t^{EK} + V_t^{FK}}{1 + WACC_t} - V_{t-1}^{FK} \quad t = 1, \dots, T$$

Die Variablen V_{t-1}^{EK} , $t = 1, \dots, T$ beschreiben bekanntlich die erwartete Entwicklung des Eigenkapitalmarktwertes im Zeitablauf. Zur Ableitung der Bestimmungsgleichung des Eigenkapitalmarktwertes in der Schreibweise des WACC-Ansatzes wird die Bestimmungsgleichung von V_{T-1}^{EK} in V_{T-2}^{EK} , der sich ergebende Ausdruck für V_{T-2}^{EK} in V_{T-3}^{EK} eingesetzt und diese Substitution bis zum Bewertungszeitpunkt fortgeführt. Wird ein Planungszeitraum von beispielsweise drei Perioden unterstellt, dann hat die solcherart gewonnene Gleichung zunächst folgendes Aussehen:

$$V_0^{EK} = \frac{E_0[F\tilde{C}F_1] + \left(\frac{E_0[F\tilde{C}F_2] + \left(\frac{E_0[F\tilde{C}F_3] - V_2^{FK}}{1 + WACC_3} \right) + V_2^{FK}}{1 + WACC_2} - V_1^{FK} \right) + V_1^{FK}}{1 + WACC_1} - V_0^{FK}$$

Die Gesamtkapitalkosten $WACC_1$, $WACC_2$ und $WACC_3$ beschreiben jene Zinssätze, mit denen der jeweils zum Periodenende erwartete Gesamtkapitalmarktwert des TCF-Zahlungsstroms auf die Vorperiode abzuzinsen ist. Die periodenspezifischen Kapitalkosten transformieren mithin zum Periodenende erwartete Marktwerte auf die Vorperiode und nicht zum Periodenende erwartete Cash Flows.

Zur Herleitung der WACC-Bewertungsgleichung in bekannter Schreibweise ist die obenstehende Gleichung lediglich in ihre Bestandteile aufzuspalten:

$$V_0^{EK} = \frac{E_0[F\tilde{C}F_1]}{1 + WACC_1} + \frac{E_0[F\tilde{C}F_2]}{(1 + WACC_2) \cdot (1 + WACC_1)} + \frac{E_0[F\tilde{C}F_3]}{(1 + WACC_3) \cdot (1 + WACC_2) \cdot (1 + WACC_1)} - V_0^{FK}$$

⁶⁸ Vollkommen analog hierzu Steiner/Wallmeier (1999), S. 5 in Bezug auf den WACC-Ansatz bei unterstellter wertorientierter Finanzierung.

Mit dieser Aufspaltung, mit der erst die Herleitung periodenspezifischer Risikozuschläge für die Bewertung einzelner Cash Flows gelingt, werden die einzelnen Cash Flows mit einem Zinssatz diskontiert, der dem Risiko des riskanten Gesamtmarktwertes zu dem entsprechenden Zeitpunkt entspricht, nicht hingegen dem Risiko des Cash Flows selbst. Steiner/Wallmeier (1999) stellen in diesem Zusammenhang in Bezug auf die Herleitung des Total Cash Flow-Ansatzes bei unterstellter wertorientierter Finanzierung folgendes fest: „Obwohl mathematisch korrekt, erscheint die Aufspaltung ökonomisch wenig zweckmäßig, weil der Zinssatz [...] nur für die Summe der Überschußgrößen den passenden Diskontierungszinssatz bildet, nicht aber in isolierter Betrachtung für die *einzelnen Summanden*. Zusammenfassend ist festzuhalten, daß Formel [...] als Ganzes zum richtigen Ergebnis führt, die einzelnen Komponenten aber schwer zu interpretieren sind.“⁶⁹ Diese Zusammenhänge gelten gleichermaßen für den hier betrachteten WACC-Ansatz mit unterstellter autonomer Finanzierung, wenngleich sich die Ableitung der WACC-Bewertungsfunktion bei autonomer Finanzierung ungleich schwieriger gestaltet, als die Ableitung der TCF-Bewertungsfunktion bei wertorientierter Finanzierung.

Im Hinblick auf die Interpretationsfähigkeit der Bewertungsformeln im Sinne der Aussagefähigkeit ihrer Einzelmarktwertbeiträge liegen die Vorteile auf Seiten des APV-Ansatzes. Dennoch muß dem WACC-Ansatz mit unterstellter autonomer Finanzierung praktische Relevanz beigemessen werden. Dies insbesondere vor dem Hintergrund, daß das mittlerweile tradierte Gesamtkapitalkostenkonzept in der Bewertungspraxis eine Vorrangstellung gegenüber den anderen DCF-Bewertungsverfahren einnimmt. Das Konzept gewinnt darüberhinaus zunehmende Bedeutung im Rahmen der Kapitalmarktkommunikation von Unternehmen.

Nach einer empirischen Studie von Bruner/Eades/Harris/Higgins (1998) verwenden 89% der befragten US-Unternehmen – unter anderen Compaq, McDonald’s, Pepsi und Walt Disney – und 100% der befragten Finanzdienstleister/-berater – unter anderen CS First Boston, Merrill Lynch, Morgan Stanley und Salomon Brothers – das DCF-Konzept im Rahmen der Projektbeziehungweise Unternehmensbewertung.⁷⁰ 85% der Unternehmen und 100% der Finanzdienstleister kalkulieren dabei einen WACC. Zur Kalkulation der Eigenkapitalkosten

⁶⁹ Steiner/Wallmeier (1999), S. 4, Kursivdruck im Original.

⁷⁰ Die wichtigsten Ergebnisse der Studie lauten: „Discounted Cash Flow (DCF) ist the dominant investment-evaluation technique. WACC is the dominant discount rate used in DCF analyses. Weights are based on *market* not book value mixes of debt and equity. The after-tax cost of debt is predominantly based on *marginal* pretax costs, and *marginal or statutory* tax rates. The CAPM is the dominant model for estimating the cost of equity. Some firms mentioned other multi-factor asset-pricing models (e.g. Arbitrage Pricing Theory) but these were in the small minority. No firms cited specific modifications of the CAPM to adjust for any empirical shortcomings of the model in explaining past returns.“ [Bruner/Eades/Harris/Higgins (1998), S. 15 f.; Kursivdruck im Original.]. Entsprechende Untersuchungen für den deutschsprachigen Raum finden sich bei Pellens/Tomaszewski/Weber (2000) sowie Prietze/Walker (1995).

ziehen 81% der Unternehmen und 80% der Finanzdienstleister das (Standard-) CAPM heran.⁷¹

Die Notwendigkeit zur Bestimmung einer die Gesamtkapitalkosten beschreibende Größe WACC kann auch dann gegeben sein, wenn sie von Investoren beziehungsweise Finanzanalysten im Rahmen der Kapitalmarktkommunikation eingefordert wird. „Die erweiterte Finanzberichterstattung ist ein Element des wertorientierten Management. Dieses hat sich in den letzten Jahren im Rahmen der Kapitalmarktorientierung der Unternehmen vor allem von den USA aus unter dem Schlagwort Shareholder Value durchzusetzen begonnen. [...] Wesentlicher Bestandteil des wertorientierten Management ist ein zielgerichtet ausgestaltetes Rechnungswesen, das die Verfahren zur Erfolgsmessung und Erfolgsbeurteilung bereitstellt und die Unternehmensziele und deren Erreichung kommuniziert. Dabei handelt es sich um Verfahren der Unternehmensbewertung, meist Discounted-Cash-Flow-Methoden (DCF-Methoden), sowie um wertorientierte Kennzahlen, die vor allem auch zur Verfolgung der Zielerreichung dienen. Die Kommunikation muß nach außen in Richtung der Investoren und Kapitalmärkte als auch nach innen in Richtung der Entscheidungsträger im Unternehmen erfolgen. Dies erfordert eine gewisse Konsistenz der nach außen und nach innen berichteten Informationen. [...] Die für die Investoren erforderlichen Informationen gehen über die klassische Finanzberichterstattung, die durch gesetzliche Regelungen vorgesehen ist, weit hinaus. Schlagworte dafür sind Business Reporting und Value Reporting.“⁷²

Wird das Kapitalkostenkonzept unternehmensintern und -extern nicht nur als vereinfachende Pauschalannahme über die Finanzierungskosten eines Unternehmens/Projektos kommuniziert, dann sind bei vorliegender absoluter Planung der künftigen Nettokreditaufnahme mit

⁷¹ In dieser Studie geben zudem 51% der befragten Unternehmen an, das Kapitalkostenkonzept auch für andere Zwecke als für die Investitionsbewertung einzusetzen, so zum Beispiel für die wertorientierte Steuerung und Performancemessung von Geschäftsbereichen. 100% der befragten Finanzdienstleister geben an, den Unternehmenswert eines multidivisionalen Unternehmens als Aggregat von Divisionswerten zu ermitteln, wobei die Divisionswerte mit jeweils eigenspezifischen Spartenkapitalkosten (WACC) bestimmt werden. Die solcherart charakterisierte divisionale Unternehmensführung wird bei Albach (2001) kritisch diskutiert. Der Autor führt in diesem Zusammenhang unter anderem folgendes aus: „Nach Rappaport ist der Unternehmenswert gleich der Summe der Geschäftsbereichswerte. Das aber heißt, daß der ‚Wert der Zentrale‘, also der Wert der Unternehmensleitung in einem divisional organisierten Unternehmen, gleich null ist. Dies ist theoretisch jedoch nur dann richtig, wenn 1. der Wert der Beziehungen zwischen den einzelnen Geschäftsbereichen und/oder 2. der Wert der Beziehungen der einzelnen Geschäftsbereiche zur Zentrale gleich null sind.“ [S. 655]. Diese Thesen werden in weiterer Folge ausführlich untermauert. Im Ergebnis kommt Albach zu der Schlußfolgerung: „Unternehmensleitungen, die ihre Geschäftsbereiche ‚wertorientiert‘ führen, erfreuen möglicherweise die Finanzanalysten, sicherlich die Wettbewerbshüter und sicherlich nicht ihre Aktionäre.“ [S. 667]. Zu einer kritischen Diskussion der Shareholder Value-Maxime und seiner Umsetzung vgl auch Kürsten (2000); Schmidt/Maßmann (1999); Speckbacher (1997) und die dort angegebene Literatur.

⁷² Wagenhofer (2001), S. 11 f. Eine empirische Untersuchung über die wertorientierte Berichterstattung der DAX 30- und NEMAX 50-Unternehmen findet sich bei Fischer/Becker/Wenzel (2002).

deterministischer Entwicklung des Fremdkapitalbestandes die periodenspezifischen Kapitalkosten

$$(3) \quad WACC_t = k^{EK} - \frac{V_{t-1}^{TS} \cdot (1 + k^{EK}) - V_t^{TS}}{V_{t-1}^{EK} + V_{t-1}^{FK}}, \quad t = 1, \dots, T$$

zu kalkulieren. Zur Bestimmung von $WACC_t$, $t = 1, \dots, T$ bestehen prinzipiell zwei Möglichkeiten:

In der ersten Variante werden die zeitpunktbezogenen Eigenkapitalmarktwerte V_{t-1}^{EK} , $t = 1, \dots, T$ in (3) eingesetzt, um die Kapitalkostensätze zu ermitteln. Die erwartete Entwicklung des Eigenkapitalmarktwertes im Zeitablauf könnte dabei einerseits nach den hier vorgestellten Lösungsalgorithmen mittels Matrizen, Determinanten oder Rückwärtssubstitution berechnet worden sein, andererseits nach der Bewertungsformel des APV-Ansatzes. Gegen die an zweiter Stelle genannte Vorgehensweise wird in der Literatur im Allgemeinen vorgebracht, daß diese Lösung keine Eigenständigkeit aufweist.⁷³ Die in diesem Beitrag explizit aufgezeigte Ergebnisidentität der Bewertungsmethoden macht augenscheinlich, daß dieser Einwand zu relativieren ist: Es ist schließlich müßig darüber zu diskutieren, ob die zeitpunktbezogenen Eigenkapitalmarktwerte mit Hilfe der Bewertungsgleichung des APV-Ansatzes oder der des WACC-Ansatzes gewonnen wurden, wenn beide Methoden sowohl im Hinblick auf das absolute Bewertungsergebnis als auch im Hinblick auf die Struktur der Lösungsmenge gleichwertig sind.

In der zweiten Variante werden die gemäß

$$(19) \quad V_{t-1}^{EK} = \sum_{\tau=t}^T \frac{E_0[F\tilde{C}F_\tau]}{\prod_{n=1}^{\tau-t+1} (1 + WACC_{\tau-n+1})} - V_{t-1}^{FK}, \quad t = 1, \dots, T$$

definierten zeitpunktbezogenen Eigenkapitalmarktwerte in die gemäß (3) definierten Bestimmungsgleichungen von $WACC_t$, $t = 1, \dots, T$ eingesetzt. Es ergibt sich wiederum ein Gleichungssystem mit T Gleichungen und T Variablen. Abhängige Funktionsvariablen sind $WACC_t$, $t = 1, \dots, T$. Sie sind modellendogen bestimmt. Alle anderen Variablen sind unabhängige Funktionsvariablen. Sie werden modellexogen vorgegeben. Die abhängigen Funktionsvariablen sind dabei wie folgt miteinander verknüpft:

⁷³ So zum Beispiel Schwetzler/Darijtschuk (1999), S. 315, Fußnote 29 in Bezug auf Richter (1997), S. 230.

$$(20) \quad WACC_1 = f(WACC_1, WACC_2, \dots, WACC_T)$$

$$WACC_2 = g(WACC_2, \dots, WACC_T)$$

⋮

$$WACC_T = h(WACC_T)$$

Eine etwas kompaktere Schreibweise dieses Systems läßt sich erreichen, indem die impliziten Kapitalkostengleichungen in ihre explizite Form überführt werden. Für einen Dreiperiodenmodell beispielsweise erhält man dann das folgende System:

$$WACC_1 = \frac{E_0[F\tilde{C}F_1] + \frac{E_0[F\tilde{C}F_2]}{1+WACC_2} + \frac{E_0[F\tilde{C}F_3]}{(1+WACC_3) \cdot (1+WACC_2)}}{\frac{E_0[F\tilde{C}F_1]}{1+k^{EK}} + \frac{E_0[F\tilde{C}F_2]}{(1+k^{EK}) \cdot (1+WACC_2)} + \frac{E_0[F\tilde{C}F_3]}{(1+k^{EK}) \cdot (1+WACC_3) \cdot (1+WACC_2)} + V_0^{TS} - \frac{V_1^{TS}}{1+k^{EK}}} - 1$$

$$WACC_2 = \frac{E_0[F\tilde{C}F_2] + \frac{E_0[F\tilde{C}F_3]}{1+WACC_3}}{\frac{E_0[F\tilde{C}F_2]}{1+k^{EK}} + \frac{E_0[F\tilde{C}F_3]}{(1+k^{EK}) \cdot (1+WACC_3)} + V_1^{TS} - \frac{V_2^{TS}}{1+k^{EK}}} - 1$$

$$WACC_3 = \frac{E_0[F\tilde{C}F_3]}{\frac{E_0[F\tilde{C}F_3]}{1+k^{EK}} + V_2^{TS}} - 1$$

Eine mögliche Lösungsvariante für dieses System besteht in der bekannten Rückwärts-substitution. Hierzu wird der Funktionswert von $WACC_3$ berechnet, in die Bestimmungsgleichung von $WACC_2$ eingesetzt und dann der Wert von $WACC_2$ berechnet. Der sich ergebende Wert von $WACC_2$ wird sodann in Verbindung mit dem Wert von $WACC_3$ in die Bestimmungsgleichung von $WACC_1$ eingesetzt, um schließlich den Wert von $WACC_1$ zu ermitteln.

Welche Struktur besitzt die Lösungsmenge? Man erhält in allgemeiner Schreibweise bei einem Planungshorizont von T :

$$(21) \quad WACC_t = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t] + \sum_{\tau=t+1}^T \frac{E_0[F\tilde{C}F_\tau]}{(1+k^{EK})^{\tau-t}} + V_t^{TS}}{\sum_{\tau=t}^T \frac{E_0[F\tilde{C}F_\tau]}{(1+k^{EK})^{\tau-t+1}} + V_{t-1}^{TS}} - 1 = \frac{E_0[F\tilde{C}F_t] + V_t^{EK} + V_t^{FK}}{V_{t-1}^{EK} + V_{t-1}^{FK}} - 1, \quad t = 1, \dots, T$$

Der Zählerterm jeder Kapitalkostengleichung beschreibt den zum Periodenende erwarteten Marktwert des Gesamtkapitals, der Nennerterm den zum Periodenanfang erwarteten Marktwert des Gesamtkapitals, jeweils in der Schreibweise des APV-Ansatzes. Die implizite Form der periodenspezifischen Kapitalkostenfunktionen läßt sich mithin durch geeignete Umformulierung in eine explizite Form überführen. Die explizite Form ergibt sich dabei als Quotient aus dem zum Periodenende und Periodenanfang erwarteten Gesamtkapitalmarktwert in der Schreibweise des APV-Ansatzes abzüglich eins.

Mit Hilfe der solcherart definierten Gesamtkapitalkosten läßt sich auch eine Bestimmungsgleichung für die Kapitalkosten im Rentenmodell ableiten. Mit $E_0[F\tilde{C}F_t] = E_0[F\check{C}F]$, $t = 1, 2, \dots$ und $V_t^{TS} = V_0^{TS} = s \cdot V_0^{FK}$, $t = 1, 2, \dots$ ergibt sich (21) zu:

$$(22) \quad WACC_t = WACC = \frac{E_0[F\tilde{C}F] + \frac{E_0[F\check{C}F]}{k^{EK}} + s \cdot V_0^{FK}}{\frac{E_0[F\tilde{C}F]}{k^{EK}} + s \cdot V_0^{FK}} - 1, \quad t = 1, 2, \dots$$

Wird die rechte Seite der Gleichung auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, dann folgt:

$$(23) \quad WACC = \frac{E_0[F\check{C}F]}{\frac{E_0[F\tilde{C}F]}{k^{EK}} + s \cdot V_0^{FK}} \Leftrightarrow \frac{E_0[F\check{C}F]}{k^{EK}} + s \cdot V_0^{FK} = \frac{E_0[F\check{C}F]}{WACC}$$

Man erhält wiederum eine Lösung nach Modigliani/Miller (1963). In ihrem Beitrag wird die Bestimmungsgleichung des APV-Ansatzes bekanntlich durch algebraische Umformungen unter Berücksichtigung der Marktwertbestimmungsgleichungen von Eigen-, Fremd-, und Gesamtkapital in die Bestimmungsgleichung des WACC-Ansatzes überführt:

$$(24) \quad V_0^{EK} + V_0^{FK} = \frac{E_0[F\check{C}F]}{k^{EK}} + s \cdot V_0^{FK} = \frac{E_0[F\check{C}F]}{WACC}$$

$$WACC = k^{EK} \cdot \left(1 - s \cdot \frac{V_0^{FK}}{V_0^{EK} + V_0^{FK}} \right)$$

Im Hinblick auf das in diesem Beitrag diskutierte, im Sinne von impliziten Funktionen charakterisierte, Zirkularitätsproblem bleibt im Ergebnis festzuhalten, daß auch für die hier zuletzt betrachtete kapitalkostenorientierte Formulierung des Bewertungsproblems sowohl im

Mehrperiodenmodell als auch im Rentenmodell mit unterstellter autonomer Finanzierungspolitik eine analytische Lösung möglich ist.

5. Schlußbetrachtung

Welche Schlußfolgerungen können aus diesem Diskussionbeitrag in Bezug auf das Roll Back-Verfahren gezogen werden?

- Das Roll Back-Verfahren ist ein mächtiges und leistungsstarkes Instrumentarium, wenn es um die theoretische Fundierung, das heißt explizite Herleitung von DCF-Bewertungsgleichungen aus einem gegebenen Annahmenkatalog geht. Im Hinblick auf den anwendungsorientierten Einsatz des Verfahrens zur Lösung von impliziten Bewertungsfunktionen, das heißt im Hinblick auf die praktische Bestimmung von Unternehmenswerten, hat dieses Verfahren keine nennenswerten Vorteile.
- Zur Lösung von impliziten Bewertungsfunktionen kommen prinzipiell alle Algorithmen in Betracht, mit denen quadratische Gleichungssysteme gelöst werden können. Das Roll Back-Verfahren bezeichnet dabei nichts weiter als die im Rahmen des Gauß'schen Lösungsverfahrens zur Anwendung kommende Rückwärtssubstitution, in der ausgehend von konkreten Unternehmensdaten die zeitpunktbezogenen Marktwerte der betrachteten Kapitalposition in einer sukzessiv-retrograden Rechnung ermittelt werden. Bei einer Lösung mittels inverser Matrizen und Determinanten wird der Marktwert der gesuchten Kapitalposition in einem einzigen Schritt bestimmt. Die praktische Berechnung kann dabei mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms vorgenommen werden. Hierzu sind lediglich die in der Bewertung involvierten Matrizen und Vektoren zu erfassen.
- Die Bewertungsmodalitäten wurden in diesem Beitrag am Beispiel des WACC-Ansatzes mit unterstellter autonomer Finanzierung demonstriert.⁷⁴ Die Struktur der Lösungsmenge beschreibt dabei auch eine Lösung nach dem APV-Ansatz. Vor diesem Hintergrund kann die Lösung des Zirkularitätsproblems als Überführung der impliziten Definition der WACC-Bewertungsfunktion in ihre explizite Definition verstanden werden.

Die zu verzeichnende Ergebnisidentität der verschiedenen DCF-Varianten bei gegebener Finanzierungsstrategie veranlaßt Kruschwitz/Löffler (1999) den Anwendungsnutzen von impliziten Bewertungsfunktionen zum Zwecke der Unternehmenswertermittlung in Frage zu stellen: „Bei der Ermittlung der Netto-Cash-flows sind die Zinszahlungen an die

⁷⁴ Es hat sich in anderen Untersuchungen gezeigt, daß alle Standard DCF-Varianten (APV-, TCF-, WACC- und FTE-Ansatz) bei sowohl wertorientierter als auch autonomer Finanzierung als quadratisches Gleichungssystem

Fremdkapitalgeber abziehen. Dabei sind zwei Fälle denkbar: entweder sind die Zinszahlungen sicher [...], oder die Zinszahlungen sind unsicher [...]. Je nachdem aber, mit welchem der beiden Fälle man es gerade zu tun hat, ist auch schon klar, wie der Unternehmenswert zu berechnen ist, nämlich entweder mit der APV-Formel oder mit der WACC-Gleichung.⁷⁵ Und speziell in Bezug auf den Equity-Ansatz: „Daraus folgt, daß der Equity-Ansatz ganz und gar überflüssig ist.“⁷⁶ Vor diesem Hintergrund sollte sich für gegebene Ausprägung des zugrundeliegenden Cash Flow-Prozesses die Suche nach neuen und Analyse von bekannten DCF-Bewertungsgleichungen als hinfällig erweisen.

In jüngster Zeit haben Fischer/Mandl (2000) ein sogenanntes Risikokorrekturverfahren zur Ermittlung des Eigenkapitalmarktwertes im DCF-Ansatz zur Diskussion gestellt.⁷⁷ In dieser Arbeit wird ein Verfahren aufgezeigt, „bei dem die subjektiv erwarteten Cash Flows mit dem risikolosen Zinsfuß diskontiert werden können. Dieser erhaltene Wert kann als Wert unter Sicherheit interpretiert werden, und er wird anschließend mit einem Risikokorrekturfaktor multipliziert, der das bewertungsrelevante Risiko des Eigenkapitals widerspiegelt. Das neue Verfahren hat den Vorteil, daß es intuitiv durchschaubarer als die herkömmlichen Verfahren anzuwenden ist, da es schrittweise die zu ermittelnden relevanten Informationen ■ erwartete Cash Flows und ■ risikoloser Zinsatz bzw. ■ erwartete Marktrisikoprämie und ■ bewertungsrelevantes Risiko und deren Einfluß auf den Shareholder Value offen darlegt.“⁷⁸ Wenngleich dieser Ansatz einen Cash Flow-Prozeß ohne intertemporale stochastische Abhängigkeiten, das heißt voneinander stochastisch unabhängige Zahlungen in mehreren Zeitpunkten unterstellt – Copeland/Weston (1988) sprechen in diesem Zusammenhang von „the strongest assumption“⁷⁹ – und damit nicht ohne weiteres mit dem hier betrachteten risikozuschlagsorientierten Bewertungsmodell mit zugrundeliegendem multiplikativen Cash Flow-Prozeß verglichen werden kann, so vermag das Modell aber doch auf eindrucksvolle Weise aufzuzeigen, worum es bei der Suche nach neuen und der Analyse von bekannten DCF-Bewertungsgleichungen vielleicht gehen könnte, nämlich um die Suche und Analyse *neuer Datenqualitäten*.

mit eindeutiger Lösung formuliert werden können, und damit einer Lösung mittels inverser Matrizen oder Determinanten zugänglich sind.

⁷⁵ Kruschwitz/Löffler (1999), S. 14.

⁷⁶ Kruschwitz/Löffler (1999), S. 14

⁷⁷ Eine hierzu analoge Modellierung für die Investitionsbewertung wird bei Fischer (1999) diskutiert.

⁷⁸ Fischer/Mandl (2000), S. 471.

⁷⁹ Copeland/Weston (1988), S. 407; Vgl. hierzu auch Fama (1977), S. 9., Drukarczyk (2001), S. 327 ff., Schwetzler (2000), S. 474 f.

Zusammenfassung

In der Terminologie der Unternehmensbewertung beschreibt die implizite Definition einer Bewertungsfunktion ein Zirkularitätsproblem. Zur Lösung dieses Zirkularitätsproblems, das heißt zur Lösung der impliziten Bewertungsfunktion, kommen prinzipiell alle Algorithmen in Betracht, mit denen quadratische Gleichungssysteme gelöst werden können. Das in der Literatur diskutierte Roll Back-Verfahren beschreibt dabei die im Rahmen des Gauß'schen Lösungsverfahrens zur Anwendung kommende Rückwärtssubstitution. In diesem Beitrag wurden mit Hilfe von inversen Matrizen und Determinanten zwei weitere, dem Roll Back-Verfahren im Ergebnis gleichwertige Lösungsmethoden vorgestellt. Nach diesen Lösungsverfahren kann der Marktwert der gesuchten Kapitalposition in einem einzigen Schritt ermittelt werden, ohne die künftige Marktwertentwicklung der Kapitalposition explizit über das Roll Back-Verfahren bestimmen zu müssen. Die simultane Bestimmung der gesuchten Variablenwerte kann mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms vorgenommen werden. Es sind hierzu lediglich die in der Bewertung involvierten Matrizen und Vektoren zu erfassen. Die Bewertungsmodalitäten wurden in diesem Beitrag am Beispiel des WACC-Ansatzes mit unterstellter autonomer Finanzierung demonstriert. Die Struktur der Lösungsmenge beschreibt dabei auch eine Lösung nach dem APV-Ansatz. Vor diesem Hintergrund kann die Lösung des Zirkularitätsproblems als Überführung der impliziten Definition der WACC-Bewertungsfunktion in ihre explizite Definition verstanden werden. Bei gegebener Finanzierungsstrategie sind alle DCF-Varianten im Ergebnis gleichwertig. Die Suche nach neuen und die Analyse von bekannten DCF-Bewertungsgleichungen könnte jedoch von der Suche und Analyse neuer Datenqualitäten motiviert sein.

Verzeichnis der zitierten Literatur

- Albach, H. (2001): Shareholder Value und Unternehmenswert – Theoretische Anmerkungen zu einem aktuellen Thema, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Jg. 71, S. 643-674.
- Baetge, J./Niemeyer, K./Kümmel, J. (2001): Darstellung der Discounted-Cashflow-Verfahren (DCF-Verfahren) mit Beispiel, in: Peemöller, V.H. (Hrsg.): Praxishandbuch der Unternehmensbewertung, Herne/Berlin, S. 263-360.
- Ballwieser, W. (1980): Möglichkeiten der Komplexitätsreduktion bei einer prognoseorientierten Unternehmensbewertung, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (zfbf), Jg. 32, S. 50-73.
- Ballwieser, W. (1990): Unternehmensbewertung und Komplexitätsreduktion, 3., überarb. Aufl., Wiesbaden.
- Ballwieser, W. (2002): Unternehmensbewertung und Optionspreistheorie, in: Die Betriebswirtschaft (DBW), Jg. 62, S. 184-200.
- Breuer, W. (1998): Finanzierungstheorie, Wiesbaden.
- Bruner, R. F./Eades, K. M./Harris, R. S./Higgins, R. C. (1998): Best Practices in Estimating the Cost of Capital: Survey and Synthesis, in: Financial Practice and Education, Spring/Summer, S. 13-28.
- Campbell, J.Y. (2000): Asset Pricing at the Millennium, in: Journal of Finance, Vol. 55, S. 1515-1567.
- Constantinides, G.M. (1980): Admissible Uncertainty in the Intertemporal Asset Pricing Model, in: Journal of Financial Economics, Vol. 8, S. 71-86.
- Copeland, T.E./Weston, J.F. (1988): Financial Theory and Corporate Policy, 3rd Ed., Reading.
- Cox, J.C./Ross, S.A./Rubinstein, M. (1979): Option Pricing: A Simplified Approach, in: Journal of Financial Economics, Vol. 7, S. 229-263.
- Dinstuhl, V. (2002): Discounted-Cash-flow-Methoden im Halbeinkünfteverfahren, in: Finanz Betrieb, Jg. 4, S. 79-90.
- Drukarczyk, J. (2001): Unternehmensbewertung, 3. Aufl., München.
- Drukarczyk, J./Honold, D. (1999): Unternehmensbewertung, DCF-Methoden und der Wert steuerlicher Finanzierungsvorteile, in: Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft (ZBB), Jg. 11, S. 333-349.
- Dybvig, P.H./Ingersoll Jr., J.E. (1982): Mean-Variance Theory in Complete Markets, in: Journal of Business, Vol. 55, S.233-251.
- Dybvig, P.H./Ross, S.A. (1989): Arbitrage, in: Eatwell, J./Milgate, M./Newman, P. (Hrsg.): The New Palgrave, Finance, London and Basingstoke, S. 57-71.
- Fama, E.F. (1970): Multiperiod Consumption-Investment Decisions, in: American Economic Review, Vol. 60, S. 163-174.
- Fama, E.F. (1977): Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting under Uncertainty, in: Journal of Financial Economics, Vol. 5, S. 3-24.
- Fama, E.F. (1996): Discounting under Uncertainty, in: Journal of Business, Vol. 69, S. 415-428.
- Fichtenholz, G.M. (1974): Differential- und Integralrechnung, Berlin.

- Fischer, E. O. (1999): Die Bewertung riskanter Investitionen mit dem risikolosen Zinsfuß, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Ergänzungsheft 1, S. 25-42.
- Fischer, E.O./Mandl, G. (2000): Die Ermittlung des Shareholder Value mittels risikolosem Zinsfuß und Risikokorrekturfaktor, in: Die Betriebswirtschaft (DBW), Jg. 60, S. 459-472.
- Fischer, T.M./Becker, S./Wenzel, J. (2002): Wertorientierte Berichterstattung – Ein empirischer Vergleich der internetbasierten Geschäftsberichte von DAX 30- und Nemax 50-Unternehmen, in: Zeitschrift für kapitalmarktorientierte Rechnungslegung (KoR), Jg. 2, S. 14-25.
- Fischer, T.R./Hahnenstein, L./Heitzer, B. (1999): Kapitalmarkttheoretische Ansätze zur Berücksichtigung von Handlungsspielräumen in der Unternehmensbewertung, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Jg. 69, S. 1207-1232.
- Franke, G. (1984): Conditions for Myopic Valuation and Serial Independence of the Market Excess Return in Discrete Time Models, in: Journal of Finance, Vol. 39, S. 425-442.
- Franke, G./Hax, H. (1999): Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 4., neu bearb. u. erw. Aufl., Berlin.
- Hachmeister, D. (1998): Diskontierung bei Unsicherheit, in: Ergebnisse des Berliner Workshops "Unternehmensbewertung" vom 7. Februar 1998, Diskussionbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft der Freien Universität Berlin, Nr. 1998/7, S. 25-33, erhältlich unter: <http://www.wiwiss.fu-berlin.de/kruschwitz/Pub/Workshop.pdf>
- Haley, C.W. (1984): Valuation and Risk-Adjusted Discount Rates, in: Journal of Business Finance & Accounting, Vol. 11, S. 347-353.
- Harris, R.S./Pringle, J.J. (1985): Risk-Adjusted Discount Rates – Extensions From The Average-Risk Case, in: Journal of Financial Research, Vol. 8, S. 237-244.
- Heitzer, B./Dutschmann, M. (1999): Unternehmensbewertung bei autonomer Finanzierungs- politik, Anmerkungen zum Beitrag von Bernhard Schwetzler und Niklas Darijtschuk (ZfB 1999, H.3, S. 295-318), in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Jg. 69, S. 1463-1471.
- Hering, T. (1999): Finanzwirtschaftliche Unternehmensbewertung, Wiesbaden.
- Huang, C./Litzenberger, R.H. (1988): Foundations for Financial Economics, Englewood Cliffs.
- Husmann, S./Kruschwitz, L. (2001): Ein Standardmodell der Investitionsrechnung für deutsche Kapitalgesellschaften, in: Finanz Betrieb, Jg. 3, S. 641-644.
- Husmann, S./Kruschwitz, L./Löffler, A. (2001a): Über einige Probleme mit DCF-Verfahren, Kritische Anmerkungen zum Beitrag von Thomas Schildbach im Heft 12/2000 der zfbf, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (zfbf), Jg. 53, S. 277-282.
- Husmann, S./Kruschwitz, L./Löffler, A. (2001b): WACC and a Generalized Tax Code, Diskussionspapiere der Universität Hannover, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Nr. 243 (2001), erhältlich unter: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=286427
- Husmann, S./Kruschwitz, L./Löffler, A. (2002): Unternehmensbewertung unter deutschen Steuern, in: Die Betriebswirtschaft (DBW), Jg. 62, S. 24-42.
- Ingersoll Jr., J.E. (1987): Theory of Financial Decision Making, Savage
- Inselbag, I./Kaufold, H. (1997): Two DCF approaches for valuing companies under alternative financing strategies (and how to choose between them), in: Journal of Applied Corporate Finance, Vol. 10, S. 114-122.

- Kruschwitz, L./Löffler, A. (1999): Sichere und unsichere Steuervorteile bei der Unternehmensbewertung I, Diskussionspapier, Freie Universität Berlin.
- Kürsten, W. (2000): „Shareholder Value“ – Grundelemente und Schief lagen einer polit-ökonomischen Diskussion aus finanzierungstheoretischer Sicht, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Jg. 70, S. 359-381.
- Kürsten, W. (2002): „Unternehmensbewertung unter Unsicherheit“, oder: Theoriedefizit einer künstlichen Diskussion über Sicherheitsäquivalent- und Risikozuschlagsmethode, Anmerkungen (nicht nur) zu dem Beitrag von Bernhard Schwetzler in der zfbf (August 2000, S. 469-486), in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (zfbf), Jg. 54, S. 128-158.
- Laux, H. (1999): Marktwertmaximierung und CAPM im Ein- und Mehrperioden-Fall, in: Wagner, G.R. (Hrsg.): Unternehmensführung, Ethik und Umwelt, Festschrift zum 65. Geburtstag von Hartmut Kreikebaum, Wiesbaden.
- Lobe, S. (2001): Marktbewertung des Steuervorteils der Fremdfinanzierung und Unternehmensbewertung, in: Finanz Betrieb, Jg. 3, S. 645-652.
- Loistl, O. (1986): Grundzüge der betrieblichen Kapitalwirtschaft, Berlin.
- Loistl, O. (1990): Zur neueren Entwicklung der Finanzierungstheorie, in: Die Betriebswirtschaft (DBW), Jg. 50, S. 47–84.
- Löffler, A. (1998): WACC approach and Nonconstant Leverage Ratio, Diskussionspapier, Universität Hannover (ehemals Manuskript Freie Universität Berlin), erhältlich unter: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=60937
- Löffler, A. (2000): Tax Shields in an LBO, Diskussionspapier, Universität Hannover (ehemals Manuskript Freie Universität Berlin), Nr. 2000/02, erhältlich unter: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=217148
- Löffler, A. (2001): Miles-Ezzell's WACC Approach Yields Arbitrage, Diskussionspapiere der Universität Hannover, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Nr. 248 (2001), erhältlich unter: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=286395
- Löffler, A. (2002): Gewichtete Kapitalkosten (WACC) in der Unternehmensbewertung, in: Finanz Betrieb, Jg. 4, S. 296-307.
- Mandl, G./Rabel, K. (1997): Unternehmensbewertung, Wien.
- Meyberg, K./Vachenauer, P. (1995): Höhere Mathematik 1, 3. Aufl., Berlin.
- Miles, J.A./Ezzell, J.R. (1980): The Weighted Average Cost of Capital, Perfect Capital Markets, and Project Life: A Clarifikation, in: in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 15, S. 719-730.
- Miles, J.A./Ezzell, J.R. (1985): Reformulating Tax Shield Valuation: A Note, in: Journal of Finance, Vol. 40, S. 1485-1492.
- Modigliani, F./Miller, M.H. (1963): Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction, in: American Economic Review, Vol. 53, S. 433-443.
- Myers, S.C./Turnbull, S.M. (1977): Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News, in: Journal of Finance, Vol. 32, S. 321-333.
- Pellens, B./Tomaszewski, C./Weber, N. (2000): Wertorientierte Unternehmensführung in Deutschland, in: Der Betrieb (DB), Jg. 53, S. 1825-1833.
- Prietze, O./Walker, A. (1995): Der Kapitalisierungszinsfuß im Rahmen der Unternehmensbewertung, in: Die Betriebswirtschaft (DBW), Jg. 55, S. 199-211.
- Rendleman, Jr., R.J./Bartter, B.J. (1979): Two-State Option Pricing, in: Journal of Finance, Vol. 34, S. 1093-1110.

- Richter, F. (1997): DCF-Methoden und Unternehmensbewertung: Analyse der systematischen Abweichungen der Bewertungsergebnisse, in: Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft (ZBB), Jg. 9, S. 226-237.
- Richter, F. (2001): Simplified Discounting Rules in Binomial Models, in: Schmalenbach Business Review, Vol. 53, S. 175-196.
- Richter, F. (2002a): Simplified Discounting Rules, Variable Growth, and Leverage, in: Schmalenbach Business Review, Vol. 54, S. 136-147.
- Richter, F. (2002b): Kapitalmarktorientierte Unternehmensbewertung, Frankfurt/M.
- Richter, F./Drukarczyk, J. (2001): Wachstum, Kapitalkosten und Finanzierungseffekte, in: Die Betriebswirtschaft (DBW), Jg. 61, S. 627-639.
- Röder, K./Müller, S. (2001): Mehrperiodige Anwendung des CAPM im Rahmen von DCF-Verfahren, in: Finanz Betrieb, Jg. 3, S. 225-233.
- Rudolph, B. (1979): Kapitalkosten bei unsicheren Erwartungen, Berlin.
- Schildbach, T. (2000): Ein fast problemloses DCF-Verfahren zur Unternehmensbewertung, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (zbf), Jg. 52, S. 707-723.
- Schmidt, R.H./Maßmann, J. (1999): Drei Mißverständnisse zum Thema "Shareholder Value", in: Kumar, B.N./Osterloh, M./Schreyögg, G. (Hrsg.): Unternehmensethik und die Transformation des Wettbewerbs (Festschrift für Horst Steinmann zum 65. Geburtstag), Stuttgart, S. 125-157, auch erhältlich unter <http://www.finance.uni-frankfurt.de/> (Working Paper Series: Finance & Accounting, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/M.)
- Schneider, D. (1992): Investition, Finanzierung und Besteuerung, 7., vollst. überarb. u. erw. Aufl., Wiesbaden.
- Schwetzler, B. (2000): Unternehmensbewertung unter Unsicherheit – Sicherheitsäquivalent- oder Risikozuschlagsmethode?, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (zbf), Jg. 52, S. 469-486.
- Schwetzler, B. (2001): Bewertung von Wachstumsunternehmen, in: Achleitner, A.-K./Bassen, A. (Hrsg.): Investor Relations am Neuen Markt, Stuttgart, S. 61-96.
- Schwetzler, B./Darijtschuk, N. (1999): Unternehmensbewertung mit Hilfe der DCF-Methode – eine Anmerkung zum „Zirkularitätsproblem“, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Jg. 69, S. 295-318.
- Schwetzler, B./Darijtschuk, N. (2000): Unternehmensbewertung und Finanzierungspolitiken, Replik zu Stellungnahmen zum Beitrag: Unternehmensbewertung mit Hilfe der DCF-Methode – eine Anmerkung zum „Zirkularitätsproblem“ in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 69. Jg., H.3, S. 295-318, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Jg. 70, S. 117-134.
- Sick, G.A. (1986): A Certainty-Equivalent Approach to Capital Budgeting, in: Financial Management, Vol. 15, S. 23-32.
- Speckbacher, G. (1997): Shareholder Value und Stakeholder Ansatz, in: Die Betriebswirtschaft (DBW), Jg. 57, S. 630-639.
- Steiner, M./Wallmeier, M. (1999): Unternehmensbewertung mit Discounted Cash Flow-Methoden und dem Economic Value Added-Konzept, in: Finanz Betrieb, Jg. 1, S. 1-10.
- Sundaresan, S.M. (2000): Continuous-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment, in: Journal of Finance, Vol. 55, S. 1569-1622.

- Wagenhofer, A. (2001): Aktuelle Entwicklungen in der Finanzberichterstattung der Unternehmen, in: Institut Österreichischer Wirtschaftsprüfer (Hrsg.): Wirtschaftsprüfer Jahrbuch, Wien, S. 9-32.
- Wallmeier, M. (1999): Kapitalkosten und Finanzierungsprämissen, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Jg. 69, S. 1473-1489.
- Wilhelm, J. (1981): Zum Verhältnis von Capital Asset Pricing Model, Arbitrage Pricing Theory und Bedingungen der Arbitragefreiheit von Finanzmärkten, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (zbf), Jg. 33, S. 891-905.
- Wilhelm, J. (1983a): Finanztitelmärkte und Unternehmensfinanzierung, Berlin
- Wilhelm, J. (1983b): Marktwertmaximierung – Ein didaktisch einfacher Zugang zu einem Grundlagenproblem der Investitions- und Finanzierungstheorie, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB), Jg. 53, S. 516-534.
- Vogt, K.-D. (1996): Mathematik Repetitorium, Paderborn.
- Zurmühl, R./Falk, S. (1992): Matrizen und ihre Anwendungen 1, 6. vollst. neubearb. Aufl., Berlin.

PRICING WITH PERFORMANCE-CONTROLLED MULTIPLES

Frank Richter and Volker Herrmann
Institute for Mergers & Acquisitions
University Witten/Herdecke
email: frank.richter@gs.com
volker_herrmann@mckinsey.com

Draft Version, April 10, 2002

PRICING WITH PERFORMANCE-CONTROLLED MULTIPLES

Draft Version, April 10, 2002

Abstract

This study presents and tests an approach for the pricing of equity investments, using multiples from comparable assets that are traded and priced in the market already. The innovative aspect of this approach is that we use key performance indicators (“kpi”) to select assets for the set of comparables. We identify the kpi on the basis of a simplified valuation model. The idea of selecting companies based on kpi is employed earlier. However, in contrast to the earlier work, we avoid using multiple regressions to aggregate the kpi because the prerequisites for this statistical approach are not fulfilled. We investigate the accuracy of our approach vis-à-vis other approaches using a multi-year sample of American and European firms. The empirical results strongly suggest that a selection of comparable assets based on kpi – especially expected earnings growth rates and rates of return on capital – is superior to a selection based on SIC industry codes. Furthermore, the additional control of industry membership after controlling for kpi does not significantly increase accuracy. Findings are robust against variations of the basis of reference, the country of origin, the relevant industry as well as the year under observation. Additionally, the study offers some guidance with respect to the reliability of different bases of reference as well as diverse methods of estimating multiples from comparable sets.

Keywords: Asset Pricing, Multiples, Discounted Cash-Flow, Key Performance Indicators; **JEL-class.:** G 32, G12

1 Introduction

Despite the importance and widespread practical use of comparable methods for valuation/pricing purposes in different non-market settings such as Initial Public Offerings and corporate M&A transactions the empirical properties of multiples remain largely unexplored. Only recently a few studies have emerged, which mainly focus on one of the three major implementation challenges concerning the methods of multiples, explicitly the selection method of comparable companies, the definition of a suitable basis of reference (such as earnings, sales etc.) and the appropriate statistical estimation of relevant multiples from comparable samples.

One of the first investigations of this topic is offered by *Alford* (1992), who tests different methods of selecting comparable firms based on SIC codes and different proxies for growth and risk. On the basis of non-parametrical statistical tests he concludes that selecting comparable firms on the basis of 3-digit SIC codes is relatively efficient and additional control of firm size, return on equity and expected earnings growth rates does not reduce prediction errors significantly.¹ *Kaplan/Ruback* (1995) compare the accuracy of EBITDA-multiples relative to results based on a Discounted Cash-flow Model ("DCF") in the context of market prices realized in leveraged transactions.² Their findings suggest that both methods, the DCF and the comparable company approach, add relevant information to the price forecast. DCF, however, appears to produce slightly better results. As far as the accuracy of different multiple methods is concerned, a selection of comparable transactions in the same industry seems to yield better results than a similar public company approach. *Kaplan/Ruback*, however, do not test the suitability of bases of reference other than EBITDA or further variations of the selection criteria for comparable companies beyond industry classifica-

¹ *Boatsman/Baskin* (1981), pp. 38-53, also address the issue but do not conduct formal tests of differences in valuation accuracy between different methods.

tion.³ *Kim/Ritter* (1999) focus on the empirical pricing accuracy of multiples in Initial Public Offerings ("IPO"). For these companies the performance of market multiples appears to be rather disappointing, which might be due to the high dispersion of multiples in the underlying sample of young firms as well as to the cyclical character of the IPO market in general.

Baker/Ruback (1999) concentrate on a largely unexplored implementation challenge, namely the statistical procedure of reducing the set of multiples of comparable firms to one relevant measure that has to be applied to the target firm. So far, empirical studies have usually considered the median multiple the best measure to eliminate possible outliers and at the same time account for the underlying skewness and kurtosis of the distribution. *Baker/Ruback* challenge this view by proposing the harmonic mean as an alternative estimator.⁴ The authors base their recommendations on a specific Monte Carlo Simulation, which draws random inverse multiples from a normal distribution.⁵ In a related study *Liu/Nissim/Thomas* (1999) also test the accuracy of different multiple methods with a clear emphasis this time on the effects of varying the underlying basis of reference. In apparent contradiction to basic principles of valuation they find that multiples based on forecasted earnings clearly outperform different kinds of cash flow multiples.⁶ The worst predictions are produced by sales multiples. Neither *Kim/Ritter* nor *Baker/Ruback* or *Kaplan/Ruback* present further tests regarding an

² See *Kaplan/Ruback* (1995), pp. 1059-1093; they use a method called "Compressed APV" which discounts after tax cash flow at the (pre-tax) weighted average cost of capital. This method is described in *Ruback* (2000). See also *Kaplan/Ruback* (1996), pp. 45-60.

³ A related study, which leads to similar results concerning the prediction accuracy of EBITDA-multiples is offered by *Gilson/Hotchkiss/Ruback* (2000), pp. 43-74. The authors compare valuation estimates for firms emerging from bankruptcy with different valuation methods including multiples.

⁴ The harmonic mean of n multiples is defined as the inverse of the arithmetic mean of the inverse multiples and is mathematically always smaller than the arithmetic mean itself.

⁵ See *Baker/Ruback* (1999), p. 3.

⁶ This result is interesting because standard textbooks present cash flows as the dominant measure for valuation purposes. On the contrary, accounting related measures are criticized because they are susceptible to manipulation; see for example *Copeland/Koller/Murrin* (2000), part 1, chapter 5, "Cash is King", pp. 73-87, *Rappaport* (2000), chapter 2, "The shortcomings of accounting numbers", pp. 13-32.

appropriate and theoretically sound method of selecting comparable assets that goes beyond the generally accepted definition of comparability vaguely defined by industry classification.

In a recent study *Bhojraj/Lee (2001)* finally revive *Alford's* idea of selecting comparable companies on the basis of similar underlying economic variables instead of industry classification. For this purpose, the authors make use of a multiple regression approach that predicts a warranted multiple for each target company and then utilizes these theoretical multiples in a second step as criteria for the choice of comparable assets. The relevant multiple for the target asset is then estimated as the harmonic mean of the multiples in the comparable set as suggested in *Baker/Ruback (1999)*.

The review of existing literature results in a fragmented picture of the theoretical analyses conducted so far with each paper focusing on an isolated aspect of the multiples method. Our study intends to provide guidance with respect to all three implementation challenges but with an emphasis on the appropriate design of the selection method of comparable companies on the basis of key performance indicators (“kpi”) determining the value of assets. We will provide sound support for the kpi used in our study and assume that these kpi are also relevant for the pricing of assets. To some extent our study builds on the work of *Alford (1992)* but provides a more theoretical backing for the choice of particular kpi as selection criteria. We test different sets of kpi and compare such methods to traditional criteria guided by industry classification. Finally, we aim to analyze the accuracy of our approach versus other approaches presented earlier. Therefore, the paper is organized as follows: Section 2 presents the theoretical foundation for our approach. A simplified valuation model will be derived, which is the basis to identify specific kpi which should be controlled for when selecting comparable firms. Section 3 contains the empirical test of our approach, beginning with a description of the study set-up. Three key implementation aspects of our approach will be analyzed: What specific basis of reference, (such as earnings, book equity or some other accounting measure) should be selected? How does a selection method for comparable assets based on kpi perform in comparison to traditional

industry approaches? Which statistical measure should be used to aggregate the multiples of the comparable set? Section 4 concludes with a brief summary.

2 Identification of key performance indicators

The kpi as selection criteria for comparable firms can easily be derived from valuation models. There are several studies that try to establish a theoretical link between the equity value of a company and fundamental accounting and cash-flow variables. For example, the well-known *Gordon* growth model links the equity value of a firm to its earnings growth rate, cost of equity, and dividend pay out ratio.⁷ More recently, *Ohlson* (1990) and *Feltham/Ohlson* (1995) provide an extension of the residual income model which depicts a company's equity value as a function of the expected growth rate of earnings, the expected dividend pay out ratio, the risk free discount rate and a risk adjustment factor which is determined by the underlying stochastic process of earnings and dividends.⁸ In another recent study *Richter* (2001) addresses the question which fundamental factors constitute valuation multiples, given certain stochastic properties of the future cash-flow stream. We employ this model to identify kpi.

2.1 The model

We assume that the future cash-flow stream follows a stochastic process of the martingale class. In its most simple version future cash-flows can either move up by a certain factor or move down by the reciprocal of the upward factor. In this case we have a recombining binomial model:⁹

$$(1) \quad C_t \in \{C_{t-1}u_t; C_{t-1}u_t^{-1}\} \quad \text{with:}^{10} \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad C_0 > 0, u_t \geq 1.$$

⁷ See *Gordon/Shapiro* (1956), pp. 102-110; *Gordon* (1962), p. 45.

⁸ See *Ohlson* (1990), pp. 648-676; *Feltham/Ohlson* (1995), pp. 689-731.

⁹ See *Richter* (2001), p. 175-196; *Richter* (2002), p. 2.

¹⁰ $t = 0$ symbolizes the present.

We need more structure regarding the cash flow for our analysis to come. Assume that C represents the cash flow of a firm that is financed with equity only. In order to be able to grow, the firm has to retain a certain amount of its cash flow. This can be taken into account as follows:¹¹

$$(2) \quad C_t \in \{EBIT_{t-1}(1-\tau)(1-\theta)u_t; EBIT_{t-1}(1-\tau)(1-\theta)u_t^{-1}\}$$

with:

EBIT = Earnings Before Interest and Taxes

τ = corporate tax rate

θ = reinvestment rate

θ represents the share of after-tax EBIT that is reinvested into the firm in excess of depreciation and other non-cash items.

In addition we have two equivalent probability measures P and Q , which can be applied to the cash-flow process.¹² The measure Q shall be defined such that it transforms the conditional expected value of an uncertain cash flow in t (given its filtration in $t-1$) into its economic value in t . If P is applied to the process, we get expected values. For example, the expected cash flow in time period 1 can be described as:

$$(3) \quad E_P[C_1] = pEBIT_0(1-\tau)(1-\theta)u_1 + (1-p)EBIT_0(1-\tau)(1-\theta)u_1^{-1}$$

The unconditional expected growth rate is $1 + g_t = pu_t + (1-p)u_t^{-1}$. As already mentioned, we assume that growth stems from reinvestment, which can be expressed as:

¹¹ Equation (2) is identical to the numerator in the terminal value calculation on the basis of NOPLAT (Net operating profit less adjusted taxes) as suggested by *Copeland/Koller/Murrin* (1996), Appendix A, pp. 535-537.

¹² For an interpretation of the probability measures P and Q see *Richter* (2002), pp. 2-3.

$$(4) \quad g_t = \theta r_t$$

with: r_t = expected rate of return on net new investment

Inserting this into (3) and collecting terms yields:

$$(5) \quad E_P[C_1] = EBIT_0(1-\tau)(1-g_1/r_1)(1+g_1)$$

If the probability q is used instead of p the expected cash flow represents a certainty equivalent, which can be determined on the basis of the certainty equivalent growth rate $1+g_t^* = qu_t + (1-q)u_t^{-1}$ and the certainty equivalent rate of return $r_t^* = g_t^* / \theta$:¹³

$$(6) \quad E_Q[C_1|F_0] = EBIT_0(1-\tau)(1-g_1^*/r_1^*)(1+g_1^*)$$

The risk-free rate must be used to discount certainty equivalents obtained by applying the certainty equivalent probability q in quantifying the expectation:

$$(7) \quad V_0[C_1] = EBIT_0(1-\tau)(1-g_1^*/r_1^*)(1+g_1^*)(1+r_f)^{-1}$$

The relation between p and q reflects the degree of risk aversion of investors: Investors who do not differentiate between p and q are risk neutral; for this group of investors, expected cash flows and certainty equivalent cash flows are the same. Risk-averse investors assign a value to q that is lower than p . Without further specification of the relation between p and q we can define the range of the possible values of the asset, given the process according to (1): The minimum value obtains with $q \rightarrow 0$, the maximum value is given with $p = q$. Knowing the range of attainable values is sufficient for the purpose of our analysis.

¹³ For a detailed derivation of risk neutral probabilities and risk adjusted growth rates see *Richter* (2001), pp. 182-185.

If certain factors like the growth rate are constant, the valuation formula simplifies. First, we consider the case in which the growth rate of the unconditional expectation is constant, i.e., $u_t = u$ for all t . To incorporate debt financing as well, we assume in addition that the firm realizes a financing policy based on constant leverage ratios $l = D_t / V_t^{\text{Ent}} = \text{const.}$ Finally, the life of the firm shall not be limited. With that we get a version of the constant growth model in which the entity value can be calculated as:

$$(8) \quad V_0^{\text{Ent}} = \frac{C_0(1+g^*)}{r_f(1-\tau l) - g^*}, \text{ with: } C_0 = \text{EBIT}_0(1-\tau)(1-\theta)$$

This is the risk-neutralized WACC-approach with C_0 indicates the unlevered cash flow at time 0. The model can be transformed into the risk-neutralized total cash-flow approach and the risk-neutralized equity approach as follows:¹⁴

$$(9) \quad V_0^{\text{Ent}} = \frac{\text{TCF}_0(1+g^*)}{r_f - g^*}$$

with: $\text{TCF}_0 = \text{EBIT}_0(1-\tau)(1-\theta) + \tau r_f D_0$

$$(10) \quad V_0^{\text{Ent}} = \frac{\text{FTE}_0(1+g^*)}{r_f - g^*} + D_0$$

with: $\text{FTE}_0 = \text{EBIT}_0(1-\tau)(1-\theta) - r_f D_0(1-\tau) + \frac{1+r_f}{1+g^*} g^* D_0$

Based on these enterprise values, equity values are given by $V_0^{\text{Eq}} = V_0^{\text{Ent}} - D_0$.

¹⁴ For simplicity purposes we assume that interest will be paid based on the amount of debt at the end of the period. (8) is based on the more common assumption that interest is paid based on the amount of debt at the beginning of the period. (8), (9) and (10) yield identical results if the following discount rate is substituted into (8): $wacc = r_f(1-\tau(1+g^*)l)$

2.2 Derivation of valuation multiples

So far, entity and equity values of firms have been depicted as functions of different cash-flow measures, namely free cash flow (C) in (8), total cash flow (TCF) in (9) and flow to equity (FTE) in (10). Based on this, we first derive the well-known Equity Price/Earnings (P^{Eq}/E) multiple. Our argument is that the factors influencing the P^{Eq}/E -multiple can be derived from the valuation multiple V^{Eq}/E .¹⁵ Further factors may influence prices, however, these are beyond the control of simple valuation models.¹⁶

From (10) the V^{Eq}/E -multiple can easily be derived using the following relation:

$$(11) \quad \frac{V_0^{Eq}}{E_0} = \frac{(1+g^*)(1-g^*/roe^*)}{r_f - g^*}$$

with:

$$\begin{aligned} FTE_0 &= EBIT_0(1-\tau)(1-\theta) - r_f D_0(1-\tau) + g^* D_0(1+r_f)/(1+g^*) \\ &= E_0 - EBIT_0(1-\tau)\theta + g^* D_0(1+r_f)/(1+g^*) \\ &= E_0(1-\varphi) \\ roe^* &= g^* / \varphi \end{aligned}$$

¹⁵ In the following theoretical derivations the variables V^{Eq} and V^{Ent} are used instead of P^{Eq} and P^{Ent} to indicate that theoretical market value (V) is not necessarily identical to observed market price (P) when markets are incomplete, see for example *Shleifer/Vishny* (1997), pp. 35-55. This highlights the role of multiples as pricing instruments as opposed to valuation methods and explains their usage for the explanation of value-price-discounts as in IPOs (see *Purnanandam/Swaminathan* (2001)); conglomerates (see *Berger/Ofek* (1995), pp. 39-65) or price comparisons between public and private companies (see *Koeplin/Sarin/Shapiro* (2000), pp. 94-101). Later in the empirical analysis the variable P will be used instead of V when empirical multiples are constructed using observed market prices.

¹⁶ The derived kpi which determine value in the simplified models are not the only relevant drivers of market price. Other factors include asymmetric information (see for example *Rock* (1986), pp. 188-212, general demand/supply conditions or the specific market segment under observation (as will be shown later). For the purpose of this paper, however, it shall be assumed that kpi determine both value and price. The additional price relevant factors are controlled for by deriving a price estimate from actual observed market prices from comparable assets.

In this model, the flow to equity is defined on the basis of net income times one minus the retention rate ϕ . The retention rate itself is a function of the growth rate (g^*) and the certainty equivalent rate of return on the funds retained by the firm ($roic^*$). The amount of retained cash flow depends on that part of the reinvestment, which has to be financed with equity.

The derivation of an alternative multiple based on earnings before interest and after taxes (EBIAT) is analogous to the calculations set out before.

$$(12) \quad \frac{V_0^{\text{Ent}}}{\text{EBIAT}_0} = \frac{(1+g^*)(1-g^*/roic^*)}{r_f - g^*}$$

with:

$$\begin{aligned} \text{TCF}_0 &= \text{EBIT}_0(1-t)(1-q) + tr_f D_0 \\ &= \text{EBIAT}_0 - \text{EBIT}_0(1-\tau)\theta \\ &= \text{EBIAT}_0(1-J) \end{aligned}$$

$$roic^* = g^* / J$$

The specifications of the V^{Eq}/E - and $V^{\text{Ent}}/\text{EBIAT}$ -multiples can easily be extended to additional bases of reference. Assuming that the rates of return on net new investment are identical with the rates of return of the total firm, we can substitute the (after tax) profitability ratios $roe = E / BE$ and $roic = \text{EBIAT} / IC$:

$$(13) \quad \frac{V_0^{\text{Eq}}}{BE_0} = \frac{roe(1+g^*) - g^*}{r_f - g^*}$$

$$(14) \quad \frac{V_0^{\text{Ent}}}{IC_0} = \frac{roic(1+g^*) - g^*}{r_f - g^*}$$

Furthermore, a sales V^{Ent}/S -multiple can readily be derived from (12) using the definitions of $ros = \text{EBIAT} / S$ and $cto = S / IC$ as well as the identity $roic = ros \cdot cto$:

$$(15) \quad \frac{V_0^{\text{Ent}}}{S_0} = \frac{\text{ros}(1+g^*) - g^* / \text{cto}}{r_f - g^*}$$

Analogous to multiples based on EBIDAAT (earnings before interest, depreciation, and amortization, after taxes) can be derived from the model in (12). Establishing the relation $d = \text{EBIAT} / \text{EBIDAAT}$ and $\text{roic}_d = \text{EBIDAAT} / \text{IC}$ as a (depreciation-) adjusted return on invested capital after taxes, yields:

$$(16) \quad \frac{V_0^{\text{Ent}}}{\text{EBIDAAT}_0} = \frac{d(1+g^*)(1-g^* / \text{roic}_d)}{r_f - g^*}$$

With that we have determined the kpi that are relevant for our set of multiples.

2.3 Empirical estimation of key performance indicators

(a) Control for growth

The performance indicator g^* includes two relevant economic drivers. First, it contains the expected growth rate, which has exponential impact on each multiple. Second, it also indicates the investor's risk aversion via a discount on the unconditional expected growth rate. Based on our model the expected growth rate without risk adjustment is $1+g = pu + (1-p)/u$. With $p = 1/2$ and taking g from analyst forecasts or historical estimates we can isolate u . Thus, the remaining factor to determine the risk-adjusted growth rate is q , given that $1+g^* = qu + (1-q)/u$:

$$(17) \quad g^* = q \left(1+g + \sqrt{(1+g)^2 - 1} \right) + (1-q) \left(1+g + \sqrt{(1+g)^2 - 1} \right) - 1$$

As mentioned in section 2, knowledge of the valuation range is sufficient to determine kpi. With other words, we do not need to specify q because we do not need a point estimate of value. We know that the minimum value obtains for $q \rightarrow 0$, which can be derived from the minimum growth

$1 + g_{\min}^* = \left(1 + g + \sqrt{(1 + g)^2 - 1}\right)^{-1}$. The maximum value obtains by applying

$g_{\max}^* = g$. Thus, controlling for g is sufficient.

g^S-Portfolio (Geometric mean of annual sales growth in preceding four years)	Median P^{Eq}/E-Multiple			Median P^{Eq}/BE-Multiple		
	1997	1998	1999	1997	1998	1999
g ^S <5%	19.12	20.51	18.39	2.25	2.58	2.36
5% g ^S <10%	17.72	20.66	18.53	2.36	2.81	2.69
10% g ^S <15%	19.88	22.95	20.27	2.78	3.38	3.23
15% g ^S <20%	20.20	23.80	21.02	3.03	3.43	2.78
20% g ^S <25%	22.35	27.79	34.43	3.13	4.98	4.98
g ^S 25%	26.74	34.35	36.59	4.26	4.92	6.10
Correlation	4%	13%	18%	7%	11%	13%
g^P-Portfolio (I/B/E/S long-term forecasts for annual eps growth rates)	Median P^{Eq}/E-Multiple			Median P^{Eq}/BE-Multiple		
	1997	1998	1999	1997	1998	1999
g ^P <5%	15.50	18.85	14.43	1.70	2.14	1.66
5% g ^P <10%	16.03	18.92	15.79	2.15	2.62	2.34
10% g ^P <15%	18.40	22.52	18.90	2.66	3.46	2.95
15% g ^P <20%	22.40	28.57	27.95	3.30	4.18	4.16
20% g ^P <25%	25.79	35.01	32.48	4.50	5.05	5.19
g ^P 25%	34.24	37.99	43.30	4.95	5.29	7.22
Correlation	17%	9%	39%	10%	10%	19%

Table 1: Empirical link between P^{Eq}/E and P^{Eq}/BE multiples with two different proxies for long term earnings growth (historical sales growth (g^S) and I/B/E/S forecasts (g^P))

The theoretical and empirical relevance of growth rates for the variation of different multiples is widely accepted and has been demonstrated in numerous studies. For example, *Zarowin* (1990) shows a significant positive impact of long-

term analyst growth forecasts on P^{Eq}/E multiples.¹⁷ An analysis of the sample used in this study confirms the positive relationship revealed in prior studies.¹⁸ Table 1 clearly demonstrates how two different proxies for long-term earnings growth, i.e. long-term I/B/E/S forecasts as well as historic growth rates of sales, distinguish P^{Eq}/E multiples in the cross section.¹⁹ The necessity of controlling for growth rates when selecting comparable firms should, therefore, not be subject to much debate.

(b) Control for profitability

In addition to growth we have to control for profitability. In this section the main focus lies on the role of current roe as a selection criteria for comparable firms. We take the V^{Eq}/BE -multiple as an example, which is commonly interpreted as an indicator for future return on equity.²⁰ We refer to equation (13) and raise the issue regarding the quantification of roe.

$$(18) \quad \frac{V_0^{Eq}}{BE_0} = \frac{roe(1+g^*)-g^*}{r_f - g^*}$$

As shown above, the term $roe(1+g^*)$ represents the certainty equivalent return on equity for future periods, with $roe = E_0/BE_0$. Now if we control for the expected rate of return, $roe_1 = E_0(1+g)/BE_0$, we basically control for current earnings, expected growth and current book equity. Given that we have controlled for growth already, only current earnings and current book equity are considered in addition. Thus, current roe should be of empirical relevance, as sup-

¹⁷ See *Zarowin* (1990), pp. 439-454; see also *Litzenberger/Rao* (1971), pp. 265-277; *Alford* (1992), p. 103-104; *Liu/Nissim/Thomas* (1999), p. 18, *Lakonishok/Shleifer/Vishny* (1994), p. 1541 for similar results.

¹⁸ Multiples are constructed as of end march of the relevant year based on the preceding year's accounting measure. For a detailed description of the sample see section 3.

¹⁹ Historical growth rates of sales are used because they show the smallest standard deviation through time relative to other measures, such as earnings or book equity, see *Lakonishok/Shleifer/Vishny* (1994), p. 1550.

²⁰ See for example *Beaver/Ryan* (1993), pp. 50-56.

ported by the data in Table 2. Using the same sample as before it can be seen that current roe sharply distinguishes current P/BE in the cross section and impressively underlines their critical importance as selection criteria for comparable firms when trying to estimate equity value with the use of P^{Eq}/BE multiples.²¹

ROE-Portfolios	Median P^{Eq}/BE Multiple		
	1997	1998	1999
ROE<0.05	1.64	1.70	1.66
0.05 ROE<0.10	1.69	2.29	1.78
0.10 ROE<0.15	2.06	2.48	2.13
0.15 ROE<0.20	2.73	3.19	2.92
0.20 ROE<0.25	3.60	4.35	3.46
ROE 0.25	5.65	6.78	7.96
Correlation	33%	24%	40%

Table 2: Current P^{Eq}/BE multiples and return on equity

(c) Control for risk?

In summary, we are using current or expected growth rates g as proxies for g^* and current or expected rates of return, $roe_{t+1} = E_t(1 + g_{t+1})/BE_t$ and $roic_{t+1} = EBIAT_t(1 + g_t)/IC_t$, as proxies for roe^* and $roic^*$. This is based on the assumption that the certainty equivalents are deterministic functions of the expected variables, which is the key implication of the model presented in (1) and (2). The risk aversion of investors is taken into account on the basis of the certainty equivalent probability q . However, we do not need to control for q , given that we can determine the interval of attainable values based on the minimum and the maximum growth rate:

²¹ As above the simple theoretical and empirical relationship of current roe and P^{Eq}/BE can again be extended to the general case in which the operator of the multiple simultaneously represents the operator of the value relevant profitability ratio, such as in V^{Ent}/IC and $roic$; $V^{Ent}/EBIDA$ and d ; as well as V^{Ent}/S and ros .

$$(19) \quad g^* \in \left[\left(1 + g + \sqrt{(1+g)^2 - 1} \right)^{-1} - 1; g \right]$$

$$\text{roe}^* = g^* / \varphi \quad \text{resp.} \quad \text{roe} = g / \varphi$$

$$\text{roic}^* = g^* / \vartheta \quad \text{resp.} \quad \text{roic} = g / \vartheta$$

$$r^* = g^* / \theta \quad \text{resp.} \quad r = g / \theta$$

Our view is supported by empirical evidence. For instance, prior research has not confirmed a significant role of risk-adjusted costs of capital for the variation of different kinds of multiples after controlling for different growth proxies. Most of the tested indicators for risk, such as beta,²² firm size,²³ dispersion of earnings growth forecasts²⁴ or book leverage²⁵ show zero or only very little statistical significance for the variation of P^{Eq}/E multiples in the cross section.

3 Empirical analyses

3.1 Analysis design

(a) Sample description and descriptive statistics

The different implementation choices of the multiples method were tested at the end of March in 1997, 1998, and 1999 using a sample taken from the 524 largest (according to total market capitalization) US corporations at the end of 1998 complemented by 830 large European companies²⁶. Sample firms are drawn without exception from the non-financial services sector (excluding SIC industry codes 6000-6999) since measures like EBIAT or EBIDAAT do not possess a meaningful economic interpretation for these firms. Furthermore, sample com-

²² See *Beaver/Morse* (1978), pp. 71-72; *Zarowin* (1990), pp. 446-453.

²³ See *Alford* (1992), pp. 94-108

²⁴ See *Bhojraj/Lee* (2001), pp. 17-18.

²⁵ See *Bhojraj/Lee* (2001), pp. 17-18.

²⁶ European companies are taken from the EURO zone plus Switzerland, United Kingdom, Norway, Sweden, and Denmark. European companies were also selected on the basis of total market cap at year end 1998, namely the 550 largest companies from the countries above plus the 280 largest German corporations.

panies must match the following criteria: 1) The market capitalization is available in the Global Vantage file 2) All relevant accounting items necessary for the calculation of earnings (E), earnings before interest (EBIAT), earnings before interest depreciation and amortization (EBIDAAT), book equity (BE), and invested capital (IC) are available in the Compustat North America and Compustat Global file and are positive 3) I/B/E/S analyst forecasts of long-term earnings growth are available. In the case of multiple listings on more than one stock exchange only the market capitalization on the stock exchange of the company's home country is taken into account. The remaining sample consists of 645 firms in 1997, 665 firms in 1998 and 664 firms in 1999. The descriptive statistics of the three yearly sub samples are contained in Table 3.

	1999 (n=645)			1998 (n=665)			1997 (n=664)		
	Me-dian	Mean	SD	Me-dian	Mean	SD	Me-dian	Mean	SD
P^{Eq}/E	20.36	34.10	56.06	23.83	31.53	38.85	19.85	31.55	58.76
P^{Eq}/BE	2.91	3.93	3.31	3.67	5.58	9.22	3.16	5.93	9.25
P^{Ent}/S	1.49	2.04	1.94	1.68	2.46	2.66	1.57	2.36	2.43
$P^{Ent}/EBIDAAT$	11.03	13.16	8.51	12.79	15.32	9.63	10.98	15.18	12.43
$P^{Ent}/EBIAT$	17.67	19.89	9.71	19.79	23.27	11.39	17.64	22.56	16.48
P^{Ent}/IC	2.23	2.96	2.42	2.50	3.86	6.26	2.24	4.05	6.07
roe	0.17	0.23	0.29	0.17	0.22	0.29	0.16	0.21	0.19
roic	0.15	0.17	0.11	0.15	0.18	0.15	0.14	0.18	0.16
roic _d	0.22	0.25	0.14	0.23	0.27	0.19	0.22	0.26	0.19
ros	0.08	0.10	0.08	0.08	0.10	0.08	0.08	0.11	0.09
cto	1.90	2.34	1.94	1.90	2.53	2.47	1.85	2.44	2.53
d	0.64	0.63	0.15	0.63	0.63	0.15	0.64	0.63	0.16
g^S	0.09	0.14	0.26	0.10	0.15	0.30	0.09	0.14	0.23
g^P	0.12	0.14	0.10	0.12	0.13	0.12	0.12	0.13	0.12

Table 3: Descriptive statistics of underlying sample in all three observation years (1997-1999)

(b) Basis for the evaluation of different multiples methods

Before the empirical results concerning the comparative advantages of individual multiple methods can be presented, a choice has to be made as to which statistical basis comparisons between different implementation options of the multiple method are to be conducted. In order to increase the reliability of the results comparisons may be based on more than one statistical measure. First, median absolute prediction errors for each year are calculated and then the arithmetic mean of the three median errors in each of the three years is taken. The absolute prediction error for an individual target company i in year t is calculated as follows²⁷:

$$(20) \quad |E_{i,t}| = \left| \ln(\hat{P}_{i,t}) - \ln(P_{i,t}) \right|$$

with:

$|E_{i,t}|$ = absolute prediction error for firm i in year t

$\hat{P}_{i,t}$ = estimated market value of firm i in year t

$P_{i,t}$ = observed market value of firm i in year t

In addition to the average absolute prediction error over the three years a second basis of comparison will be the average percentage proportion of absolute prediction errors smaller than 15%. As for the median absolute prediction errors, yearly measures are averaged over the three observation years 1997, 1998, and 1999.

Finally, as a third measure assessments of individual multiple methods are based on the *Wilcoxon* rank sum test, a non parametrical test, which allows for a more thorough mutual comparison of two multiple methods. The advantage of this test

is that it does not only takes into account the number of better predictions of one method vis-à-vis an alternative method (like for example a simple sign test) but also evaluates the relative size of each deviation.²⁸

The three statistical measures briefly described above base assessments concerning the prediction accuracy of multiple methods on an ex post comparison of the estimated market value and the actual observable market value. Alternatively, comparisons between different methods might be based on an ex ante analysis of comparable sets. The smaller the dispersion of potential values resulting from comparable multiples the more reliable a prediction using that particular comparable set should be. Assuming a log-normal distribution of multiples dispersion can be expressed in the form of a dispersion interval around the sample mean of, for example, one standard deviation as well as through a confidence interval around the true sample mean. The way of calculating these dispersion measures is described in Table 5.

(c) Method to select comparable companies

As in *Alford* (1992) and *Bhojraj/Lee* (2001) several competing methods of selecting comparable companies are presented and then tested on the basis of the statistical measures previously explained in the last section.

(1) **MARKET**: This method selects all companies from the underlying sample but (in order to prevent in sample bias) excludes the target company. This selection method only serves as a benchmark method, which should be significantly improved by the four methods below. The results produced by MARKET work also as an indicator for the underlying dispersion of the total sample.

²⁷ The index Eq is left out since all errors including those generated by entity multiples are calculated on the basis of equity prices since equity price is the target of estimation. See for this method of calculating prediction errors for example *Kaplan/Ruback* (1995); *Gilson/Hotchkiss/Ruback* (2000) or *Kim/Ritter* (1999). Log errors are taken because of their symmetrical properties with respect to positive and negative deviations.

²⁸ The *Wilcoxon* rank sum test is described in *Conover* (1980).

(2) **IND**: This method uses SIC industry codes as a classification for industry membership. As in other empirical studies, the search for comparable companies starts on the four-digit basis. Digits are successively reduced, if necessary down to one digit level. The search is continued until at least four comparable companies can be identified.

(3) **FUND**: This method ignores industry membership and selects comparable companies across all industries on the basis of similar fundamental factors. Factors are derived from the valuation models in section 2 and are presented for six different bases of reference. A company is considered a peer if both relevant fundamental factors deviate less than 30% from the target company's respective factors.²⁹ Long-term growth rates are estimated using the geometric mean of annual historic sales growth rates of the preceding four years as a proxy.

(4) **FUND^P**: This method is entirely identical to FUND except for the fact that long-term growth rates for the different bases of reference are uniformly estimated via I/B/E/S long-term growth forecasts for earnings per share.

(5) **FUNDIND^P**: This method represents a combination approach and, therefore, chooses the peer companies from the same industry as in IND while at the same time controlling for underlying economics (with I/B/E/S forecasts as a proxy for long-term growth). In order to ensure identification of an appropriate number of comparable companies the tolerated deviation interval is widened to 50%.

²⁹ The definition of comparability based on a common percentage rate of 30 appears somewhat arbitrary. However, this approach ensures a flexible selection of comparables with varying numbers of firms in the individual comparable sets (eg. relatively more comparables for firms with median kpi and less comparables for firms with extreme kpi). The alternative approach of using a predefined number of comparables as proposed by *Alford (1992)*, pp. 98-99 yielded significantly higher pricing errors. Moreover, a variation of the tolerated deviation between 20% and 40% did not alter the overall empirical results relative to other selection methods.

3.2 Empirical results

(a) Choice of basis of reference

Table 4 presents the absolute prediction errors and proportions in the 15% interval of the multiple method based on six different bases of reference, E, EBIAT, EBIDAAT, BE, IC, and S.³⁰ Comparable companies are selected on the basis of kpi regardless of industry membership (FUND^P), where a company enters the comparable set if both its relevant growth rate (as estimated by the I/B/E/S consensus analyst forecast) and its relevant profitability ratio deviates less than 30% from the target company.

Multiple	Absolute prediction errors*				
	MARKET	IND	FUND	FUND ^P	FUNDIND ^P
P ^{Eq} /E	0.365	0.334	0.333	0.287	0.293
P ^{Ent} /EBIAT	0.391	0.341	0.329	0.302	0.313
P ^{Eq} /BE	0.487	0.432	0.347	0.317	0.322
P ^{Ent} /EBIDAAT	0.462	0.372	0.351	0.324	0.329
P ^{Ent} /IC	0.519	0.455	0.357	0.335	0.349
P ^{Ent} /S	0.709	0.530	0.367	0.357	0.361

* Prediction errors are calculated as the arithmetic mean of the three median errors in the three observation years 1996-1998. Absolute prediction errors for individual companies are calculated as $E_{i,t}^{ABS} = \left| \ln(\hat{P}_{i,t}) - \ln(P_{i,t}) \right|$ with \hat{P} = predicted market value and P = observed market value.

Table 4: Comparison of multiples based on different bases of reference

In accordance with the results obtained by *Liu/Nissim/Thomas* (1999) multiples based on simple earnings lead to the smallest prediction errors and the highest

30 $V^{Ent}/EBIAT$ and $V^{Ent}/EBIDAAT$ multiples are used in the empirical analysis instead of the more common $V^{Ent}/EBIT$ and $V^{Ent}/EBITDA$ multiples. Those after-tax multiples yielded overall better prediction accuracy presumably due to the additional information contained in actually paid taxes. In addition the after-tax multiples allow us to ignore leverage as a control variable.

proportion of "good" predictions.³¹ By contrast, sales multiples yield the worst prediction accuracy and therefore reflect the low information content of sales even after controlling for profitability and growth. However, by comparison with the results of *Liu/Nissim/Thomas* P^{Eq}/BE multiples produce much better pricings relative to other measures, such as EBIDAAT and EBIAT when comparable companies are selected on the basis of return on equity and earnings growth instead of industry membership. This result mirrors the significant correlation of roe and P^{Eq}/BE multiples and infers also that simple industry P^{Eq}/BE multiples will lead to erroneous conclusions about potential market prices.

(b) Selection of comparable companies

Second, selection criteria for comparable companies have to be defined. Despite the strong link between multiples and kpi, firms are often classified as comparable if these are from the same industry without prior adjustments for growth and profitability. This common practice implicitly assumes that firms within one industry tend to be roughly similar in their underlying economics. Table 5 sheds doubt on this view. A simple cross-industry selection of comparable firms solely on the basis of similar earnings growth rates and return on equity yield both smaller absolute prediction errors and a lesser degree of dispersion in potential values within the selected comparable sets. This holds already true if long-term earnings growth is estimated via such a simple measure as historic sales growth rates. The gap in pricing accuracy widens as sales growth is substituted by consensus analyst forecasts published by I/B/E/S. Even more important, a combination approach that controls industry membership in addition to relevant fundamentals does not lead to a statistically significant improvement of prediction accuracy.

³¹ Prediction results appear poor in comparison with similar analysis offered by *Alford* (1992), *Bhojraj/Lee* (2001), or *Kaplan/Ruback* (1995). Results here, however, are largely distorted by the high prediction errors in 1999, which are primarily due to the stock market bubble of this year and a resulting high number of outliers. Moreover, merely current accounting variables are tested as performance indicators. The use of forecasted indicators should further improve valuation accuracy.

	MARKET	IND	FUND	FUND ^P	FUND-IND ^P	FUND-IND ^P (USA)
Absolute prediction error*	0.365	0.334	0.333	0.287	0.293	0.266
Proportion in 15%-range**	0.225	0.250	0.239	0.290	0.285	0.309
Dispersion intervall (lower limit)***	-0.506	-0.428	-0.400	-0.388	-0.347	-0.343
Dispersion intervall (upper limit)***	1.029	0.755	0.662	0.638	0.534	0.529
Confidence-intervall (lower limit)****	-0.053	-0.292	-0.213	-0.124	-0.302	-0.121
Confidence-intervall (upper limit)****	0.059	0.415	0.272	0.142	0.434	0.139

* Absolute prediction errors are calculated as the arithmetic mean of the three median errors in the three observation years 1996-1998. Absolute prediction errors for individual companies are calculated as $E_{i,t}^{ABS} = \left| \ln(\hat{P}_{i,t}) - \ln(P_{i,t}) \right|$ with \hat{P} = predicted market value and P = observed market value.

** Calculated as the arithmetic mean of the annual proportions of absolute prediction errors not exceeding 15%

*** Interval limits for individual companies i in year t are calculated as $\left[\frac{P_{i,t}^u - \bar{P}_{i,t}}{P_{i,t}}; \frac{P_{i,t}^o - \bar{P}_{i,t}}{\bar{P}_{i,t}} \right]$ with

$\bar{P}_{i,t} = e^{\bar{m}} \cdot I_{i,t}$; $P_{i,t}^u = e^{(\bar{m}-s)} \cdot I_{i,t}$ and $P_{i,t}^o = e^{(\bar{m}+s)} \cdot I_{i,t}$. and \bar{m} represents the mean, s represents the standard deviation and n represents the number of logged multiples in the comparable set; $I_{i,t}$ is the respective basis of reference (Using entity multiples. the book value of debt $F_{i,t}$ has to be subtracted from the estimate). Annual median dispersions are separately calculated as medians lower and upper interval limits. Finally, the arithmetic mean of the three median dispersion is taken to yield the figures in the table (1996-1998).

**** Confidence Interval limits for individual companies i in year t are calculated as

$\left[\frac{P_{i,t}^{Konf,u} - \bar{P}_{i,t}}{\bar{P}_{i,t}}; \frac{P_{i,t}^{Konf,o} - \bar{P}_{i,t}}{\bar{P}_{i,t}} \right]$ with $\bar{P}_{i,t}^{Konf,u} = e^{\left[\bar{m} - \frac{sc}{\sqrt{n}} \right]} \cdot I_{i,t}$; and $\bar{P}_{i,t}^{Konf,o} = e^{\left[\bar{m} + \frac{sc}{\sqrt{n}} \right]} \cdot I_{i,t}$. and

$\bar{P}_{i,t} = e^{\bar{m}_{i,t}} \cdot I_{i,t}$ using \bar{m} as the arithmetic mean, s as the standard deviation and n as the number of logged multiples in the comparable set of target company i . $I_{i,t}$ is the respective basis of reference (Using entity multiples. the book value of debt $F_{i,t}$ has to be subtracted from the estimate) and c represents the $(1-\alpha)$ -percentile of the $t(n-1)$ -distribution. Annual median confidence intervals are separately calculated as medians of lower and upper interval limits. Finally, the arithmetic mean of the three median interval limits is taken to yield the figures in the table (1996-1998).

Table 5: Evaluation of different selection methods of comparable firms using P/E multiples

These results suggest that industry membership does not contain additional information beyond that already controlled for via the rates of return on capital and long-term growth forecasts.

Finally, a comparison based on non-parametric statistics offers the closing evidence of a superior performance of performance-controlled multiples versus industry multiples based on SIC codes. On the 95% significance level, the FUND^P method produces significantly lower prediction errors than IND while FUNDIND^P and FUND^P appear statistically indistinguishable.³²

	MARKET	IND	FUND	FUND ^P	FUNDIND ^P
Absolute prediction error*	0.365	0.334	0.333	0.287	0.293
	Wilcoxon values**				
IND	3.53				
FUND	7.27	0.21			
FUND^P	2.36	3.33	4.39		
FUNDIND^P	6.98	3.94	3.16	-0.33	

* Absolute prediction errors are calculated as the arithmetic mean of the three median errors in the three observation years 1996-1998. Absolute prediction errors for individual companies are calculated as $E_{i,t}^{ABS} = |\ln(\hat{P}_{i,t}) - \ln(P_{i,t})|$ with \hat{P} = predicted market value and P = observed market value.

** A positive (negative) number indicates that the method in the row (column) is superior to the method in the column (row). Numbers below 1,65 suggest comparable accuracy of both methods that is statistically indistinguishable on the 95% level.

Table 6: Wilcoxon rank sum test for different selection methods of comparable firms (P^{Eq}/E multiples)

³² In unpublished tests an aggregated approach in selecting comparable firms was also examined. As in *Bhojraj/Lee (2001)* the four comparable companies with the closest warranted multiple were taken into the comparable set and then the median multiple of the actual multiples was used as a capitalization factor for the target company. Warranted multiples were estimated using a linear regression approach with eight kpi as independent variables (For a definition of those factors see also *Bhojraj/Lee (2001)*, p. 16-17). As expected, prediction results from this approach fall short of individual approaches as FUND^P or FUND and in the case of P^{Eq}/E multiples it is even inferior to the simple SIC-based industry method IND.

(c) Selection of an adequate estimator

The third choice is regarding a suitable statistical measure that reduces the various multiples derived from comparable assets to a single estimator. This issue is often neglected and it is assumed that the arithmetic mean should be taken. Due to the skewed multiple distribution, however, this measure should not lead to optimal results but to a constant overestimation of value.

In order to eliminate the distorting effect of outliers, most empirical analyses using the multiple method make use of the median as an alternative estimator. The harmonic mean as a third alternative estimator is suggested by *Baker/Ruback* (1999) and is based on the assumption of normally distributed inverse multiples. Finally, In-mean as a fourth estimator can be calculated by taking the natural logarithms of the comparable multiples, then taking the average of those transformed ratios and eventually retransforming the log average using the exp function. Such a measure should work reasonably well if a log-normal distribution is the appropriate assumption for the relevant multiples.

Table 7 summarizes prediction results for these four different measures. As expected, on average the arithmetic mean leads to a significant overestimation of market value and also yields high absolute prediction errors. Surprisingly as disappointing as the arithmetic mean estimates are the results produced by the harmonic mean which demonstrate a regular underestimation of potential market value. The poor performance of the harmonic mean seems to contradict the results seen in *Baker/Ruback* (1999) and *Liu/Nissim/Thomas* (1999). Those authors, however, perform their analysis in a sample in which outliers had been eliminated prior to the analysis. A similar elimination of the 1% extreme values in multiples and relevant fundamentals at both ends of the respective distributions leads to a sharp improvement in pricing accuracy of the harmonic mean relative to the median. In a heterogeneous sample, like the one presented here, the median, however, represents by far the best estimator of potential market value.

While the kpi derived on the basis of the simplified models can serve as guidelines in the selection of comparable firms as in Alford (1992), they can alternatively be used as independent variables in a linear regression approach as suggested in Damodaran (1994, 1995, 1996, 2001).³³ Although the comparable set approach is common practice in valuation settings it may well be that a cross-market regression leads to superior prediction results. For this reason, the regression method shall also be examined. The regression approach presumes both a linear relationship between kpi, such as earnings growth rate and return on equity and the respective multiple, as well as normally distributed regression residuals.

	Prediction error*	Absolute prediction error**	Proportion in 15% range***
Median	-0.025	0.287	0.290
Ln-mean	-0.012	0.289	0.285
Harmonic mean	-0.153	0.321	0.266
Arithmetic mean	0.120	0.318	0.251

* Prediction errors are calculated as the arithmetic mean of the three median errors in the three observation years 1996-1998. Absolute prediction errors for individual companies are calculated as $E_{i,t}^{ABS} = \left| \ln(\hat{P}_{i,t}) - \ln(P_{i,t}) \right|$ with \hat{P} = predicted market value and P = observed market value.

** Absolute prediction errors are calculated as the arithmetic mean of the three median errors in the three observation years 1996-1998. Absolute prediction errors for individual companies are calculated as $E_{i,t}^{ABS} = \left| \ln(\hat{P}_{i,t}) - \ln(P_{i,t}) \right|$ with \hat{P} = predicted market value and P = observed market value.

*** Calculated as the arithmetic mean of the annual proportions of absolute prediction errors not exceeding 15%

Table 7: Comparison of different estimators for P^{Eq}/E multiples (Heterogeneous sample)

In order to allow for non-linearity an alternative approach that uses logged multiples and fundamentals will also be studied. The regression approach will be

³³ For practical valuation purposes the regression approach is presented in *Damodaran* (2001), p. 251-352; *Damodaran* (1997), p. 648-656; *Damodaran* (1996), p. 291-356; *Damodaran* (1994), p. 197-262; *Benninga/Sarig* (1997), p. 326-328. Other studies use this approach to examine major determinants of multiples, such as *Beaver/Morse* (1978), p. 71-72; *Zarowin* (1990), p. 439; *Litzenberger/Rao* (1971), p. 265-277.

tested for two multiples of different bases of reference, notably E and BE, which lead to the following four equations:

$$(21) \quad \frac{P^{Eq}}{E} = \gamma_0 + \gamma_1 g^P + \gamma_2 roe + \varepsilon$$

$$(22) \quad \ln\left(\frac{P^{Eq}}{E}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln(g^P) + \beta_2 \ln(roe) + \varepsilon$$

$$(23) \quad \frac{P^{Eq}}{BE} = \gamma_0 + \gamma_1 g^P + \gamma_2 roe + \varepsilon$$

$$(24) \quad \ln\left(\frac{P^{Eq}}{BE}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln(g^P) + \beta_2 \ln(roe) + \varepsilon$$

A cross-industry regression in the individual observation years leads to the parameters and t statistics (in brackets) contained in Table 8.³⁴

³⁴ In order to reduce distortions of outliers regarding the regression results and to make results more comparable to prior studies, such as *Bhojraj/Lee* (2001) the 1% extreme values of P^{Eq}/E , P^{Eq}/BE , roe, g, ros, and roic were eliminated from the sample which explains the reduced number of observations and lower prediction errors for $FUND^P$ in Table 8.

Year	$\frac{PEq}{E} = \gamma_0 + \gamma_1 g^P + \gamma_2 roe + \varepsilon$				$\ln\left(\frac{PEq}{E}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln(g^P) + \beta_2 \ln(roe) + \varepsilon$				
	g_0	g_1	g_2	R^2	b_0	b_1	b_2	R^2	N
1996	16.3	134.9	-47.5	16%	3.4	0.5	-0.4	30%	581
	(6.7)	(8.9)	(-6.1)		(36.6)	(12.1)	(-11.3)		
1997	20.7	80.2	-18.2	10%	3.6	0.4	-0.2	19%	604
	(12.4)	(7.8)	(-3.7)		(40.9)	(10.1)	(-7.4)		
1998	12.9	154.9	-22.0	12%	3.6	0.4	-0.2	21%	598
	(4.3)	(8.5)	(-2.6)		(31.6)	(11.1)	(-5.6)		
Year	$\frac{PEq}{BE} = \gamma_0 + \gamma_1 g^P + \gamma_2 roe + \varepsilon$				$\ln\left(\frac{PEq}{BE}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln(g^P) + \beta_2 \ln(roe) + \varepsilon$				
	g_0	g_1	g_2	R^2	b_0	b_1	b_2	R^2	N
1996	-0.7	11.2	14.5	61%	2.9	0.4	0.6	52%	581
	(-3.7)	(9.8)	(24.8)		(32.3)	(9.8)	(19.1)		
1997	-0.6	10.9	18.6	51%	3.1	0.3	0.7	52%	604
	(-2.3)	(6.3)	(22.8)		(34.6)	(8.0)	(22.3)		
1998	-1.2	19.6	17.5	32%	3.5	0.5	0.6	41%	598
	(-2.7)	(7.2)	(14.0)		(26.9)	(10.1)	(16.0)		

Table 8: Cross-industry regression of PEq/E and PEq/BE multiples (homogeneous sample)

For each sample company the regression result can now be utilized to estimate the company's potential market value. As in the previous section the resulting estimates can then be compared with the observed market capitalization. Table 9 presents absolute prediction errors as well as percentage proportions within the 15% error range and makes a comparison with the benchmark method FUND^P.

	P ^{Eq} /E-Multiple		P ^{Eq} /BE-Multiple	
	Absolute prediction error*	Proportion in the 15% interval**	Absolute prediction error*	Proportion in the 15% interval**
FUND ^P Median estimator	0.263	0.313	0.278	0.304
Regression (g ^P , ROE)	0.351	0.219	0.318	0.254
ln-regression (g ^P , ROE)	0.297	0.263	0.312	0.265
<p>* Absolute Prediction errors are calculated as the arithmetic mean of the three median errors in the three observation years 1996-1998. Absolute prediction errors for individual companies are calculated as $E_{i,t}^{ABS} = \ln(\hat{P}_{i,t}) - \ln(P_{i,t})$ with \hat{P} = predicted market value und P = observed market value.</p> <p>** Calculated as the arithmetic mean of the annual proportions of absolute prediction errors not exceeding 15%</p>				

Table 9: Comparison of the regression approach and the comparable set approach

Empirical results from the regression approach strongly suggest that this particular method of controlling for fundamentals is not effective. This result does not appear to be too surprising since the theoretical link between multiples and kpis contradicts central assumptions of multifactor linear regressions, such as missing colinearity between individual regression parameters, a linear relationship between the different kpi and the corresponding multiple as well as a normal distribution of regression residuals.³⁵ Although the log models in (22) and (24) lead to some improvement in prediction accuracy the resulting precision still clearly falls short of a simple comparable set approach on the basis of relevant fundamentals as represented by FUND.

³⁵ Within the context of the simplified valuation models set out in this paper, the theoretical impact of "g" on the level of all multiples is exponential and therefore clearly contradicts the linear assumption. A linear relation can only be observed between roe and V^{Eq}/BE as well as between roic and V^{Ent}/IC.

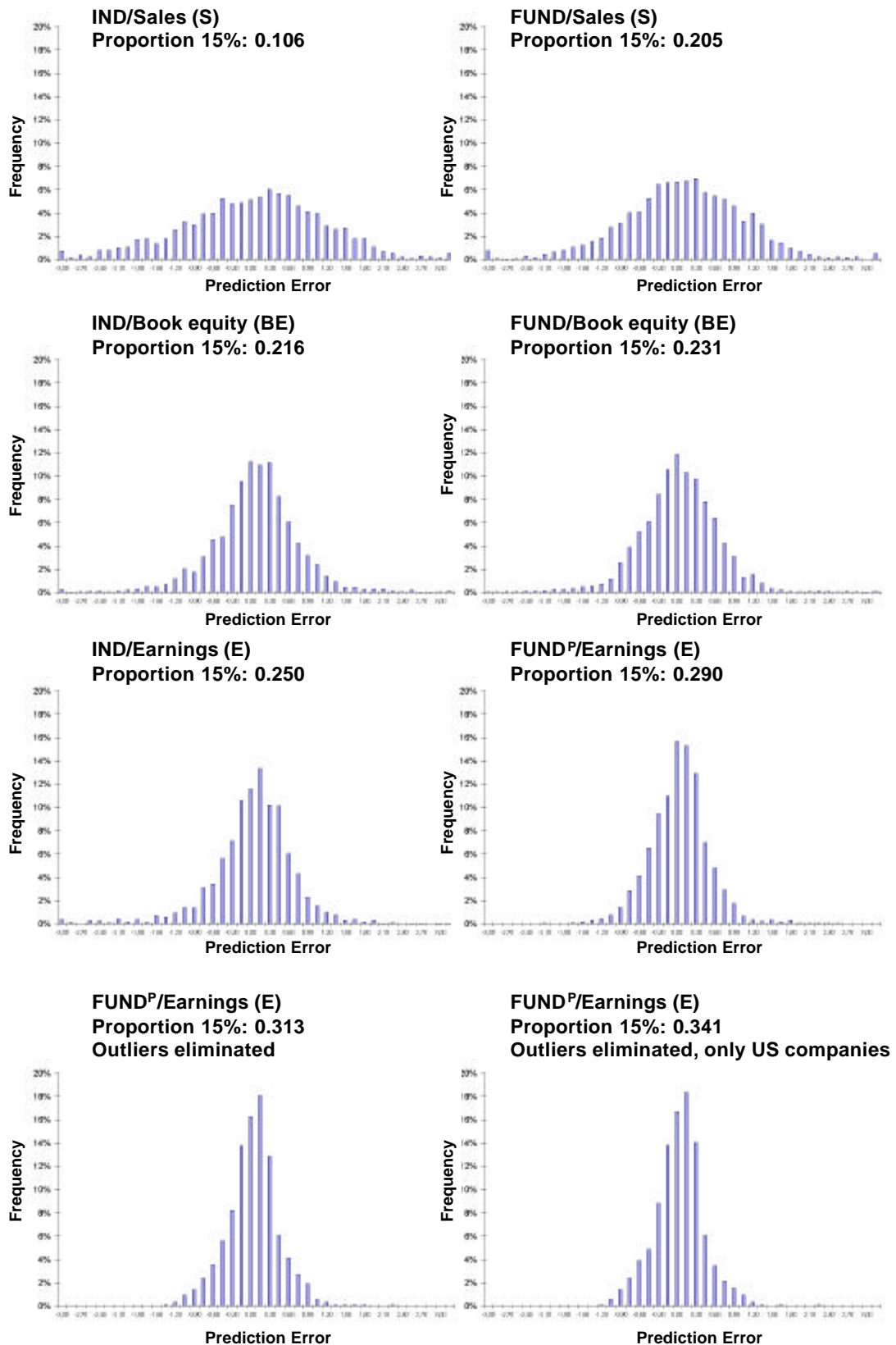


Figure 1: Distribution of prediction errors for different bases of reference, selection methods, and underlying samples

As a final summary Figure 1 depicts how the pricing accuracy of multiples can be improved by choosing the right basis of reference as well as an appropriate selection method (on the basis of kpi or of industry membership). Furthermore, the impact of an increasing homogeneity of the underlying sample is made transparent. As already explained, average prediction errors decrease and the central tendency of the error distributions increases as the basis of reference moves further down in the income statement and relevant fundamentals are controlled for. As another interesting observation, the limitation to the US capital market leads to some further improvement in pricing accuracy, an effect that cannot be observed when limiting the analysis to the German market. This observation might be due to either more efficient capital markets in the US, higher value relevance of US accounting measures relative to their European counterparts or a combination of both.³⁶

4 Conclusion

The aim of this article was to offer guidance concerning an appropriate use of market multiples. Based on a simple binomial process and the risk-neutral valuation approach it was shown how multiples are linked with kpi. Empirical proxies for growth and profitability represent relevant criteria for the selection of comparable firms. On this basis different options for three major implementation challenges, namely the choice of an appropriate basis of reference, the selection method of comparable companies, and the choice of a suitable statistical multiple estimator have been empirically tested.

As far as the first implementation question is concerned, the empirical results for the non-financial services firms suggest the use of earnings as a highly aggregated performance measure. Book equity, invested capital, or sales multiples will generally lead to much smaller pricing accuracy than earnings-based multi-

³⁶ A higher value relevance of US accounting measures, such as earnings and book equity compared to their German counterparts is suggested in the empirical analysis of *Harris/Lang/Möller* (1994), pp. 187-209.

ples, if relevant growth and profitability ratios are not controlled for. Sales multiples, in particular, appear to be almost meaningless if comparisons are based on industry classification alone. After selecting comparable companies on the basis of kpi instead of industry classification prediction accuracy increases but is still lower than that produced by earnings multiples.

In spite of the seemingly overwhelming importance of industry classification as a selection criteria for comparable companies this study shows that predictions of considerably higher accuracy can be achieved if comparable firm selection is based on relevant fundamentals instead of SIC classifications. The relevant kpi can be derived from valuation models. For example, median P^{Eq}/E multiples from cross-industry comparable sets selected exclusively on the basis of similar long-term I/B/E/S forecasts for earnings growth and return on equity lead to significantly smaller prediction errors than a traditional industry approach based on SIC codes. Moreover, an additional control of industry membership does not increase the precision of cross-industry performance-controlled multiples. This observation suggests that industry classification (at least when using SIC codes as a proxy) does not contain superior information to that already controlled for using kpi. The observation is robust against variations of industry, observation year or basis of reference and does even hold for less sophisticated proxies for earnings growth, such as historic sales growth rates. As to the appropriate selection method based on fundamentals, results in this paper strongly supports the individual control for a limited number of truly relevant factors instead of a highly aggregated measure such as a theoretical multiple.

Finally, as to the choice of an appropriate statistical estimator the empirical results outlined in this paper confirm the widely observed practice in empirical studies and practical valuation settings of using the median multiple of a limited comparable set as a capitalization factor. The retransformed mean of logged multiples represents a suitable alternative if the underlying sample shows a significant degree of skewness. In more homogeneous samples the harmonic mean as suggested by *Baker/Ruback* (1999) leads to similar results as the median and its prediction accuracy appears to be statistically indistinguishable. As

expected, the arithmetic mean shows poor overall performance and constantly overestimates potential market value. The regression approach as proposed by some authors is not an alternative to the approach using comparable sets. At least in the limited sample examined in this paper a cross-industry regression of multiples as functions of a set of fundamental variables lead to significant higher estimation errors as a "non-linear" comparable set method.

References

- Alford, A. (1992): The effect of the set of comparable firms on the accuracy of the price-earnings valuation method, in: *Journal of Accounting Research*, Vol. 30, pp. 94-108.
- Baker, M.; Ruback, R. (1999): Estimating industry multiples, Working Paper, Harvard Business School, Boston.
- Beaver, W.H.; Morse, D. (1978): What determines price-earnings ratios?, in: *Financial Analysts Journal*, July/August, pp. 65-76.
- Beaver, W.H.; Ryan, S. (1993): Accounting fundamentals of the book to market ratio, in: *Financial Analysts Journal*, November/December, pp. 50-56.
- Benninga, P.P.Z.; Sarig, O.H. (1997): *Corporate finance – a valuation approach*, New York.
- Berger, P.; Ofek, E. (1995): Diversification's effect on firm value, in: *Journal of Financial Economics*, Vol. 37, pp. 39-65.
- Bhojraj, S.; Lee, C.M.C. (2001): Who is my peer? A valuation-based approach to the selection of comparable firms, Working Paper, Cornell University.
- Boatsman, J.R.; Baskin, E.F. (1981): Asset valuation with incomplete markets, in: *The Accounting Review*, Vol. 56, H. 1, pp. 38-53.
- Copeland, T.; Koller, T.; Murrin, J. (2000): *Valuation, measuring and managing the value of companies*, 3rd Edition, New York.
- Copeland, T.; Koller, T.; Murrin, J. (1996): *Valuation, measuring and managing the value of companies*, 2nd Edition, New York.
- Conover, W.J. (1980): *Practical nonparametric statistics*, New York.
- Cox, J.; Ross, S.; Rubinstein, M. (1979): Option pricing: a simplified approach, in: *Journal of Financial Economics*, vol. 7, pp. 229-263.
- Damodaran, A. (1994): *Damodaran on valuation: Security analysis for investment and corporate finance*, New York.
- Damodaran, A. (1996): *Investment valuation, tools and techniques for determining the value of any asset*, New York.
- Damodaran, A. (1997): *Corporate finance – Theory and practice*, New York.

- Damodaran, A. (2001): *The dark side of valuation*, New York.
- Feltham, G.A.; Ohlson, J.A. (1995): Valuation and clean surplus accounting for operating and financial activities, in: *Contemporary Accounting Research*, H.12, S. 689-731.
- Gilson, S.C.; Hotchkiss, E.S.; Ruback, R.S. (2000): Valuation of bankrupt firms, in: *The Review of Financial Studies*, Vol. 13, H. 1, pp. 43-74.
- Gordon, M.J. (1962): *The investment, financing, and valuation of the corporation*, Illinois.
- Gordon, M.J.; Shapiro, E. (1956): Capital equipment analysis: The required rate of profit, in: *Management Science*, Vol. 3, pp. 102-110.
- Harris, T.; Lang, M; Möller, P. (1994): The value relevance of German accounting measures: An empirical analysis, in: *Journal of Accounting Research*, Vol. 32, H. 2, pp. 187-209.
- Kaplan, S.; Ruback, R.S. (1995): The valuation of cash flow forecasts: An empirical analysis, in: *The Journal of Finance*, Vol. 50, H. 4, pp. 1059-1093.
- Kaplan, S.; Ruback, R.S. (1996): The market pricing of cash flow forecasts: Discounted cash flow vs. the method of "comparables", in: *Journal of Applied Corporate Finance*, Winter, pp. 45-60.
- Kim, M.; Ritter, J.R. (1999): Valuing IPOs, in: *Journal of Financial Economics*, Vol. 53; pp. 409-437.
- Koeplin, J.; Sarin, A; Shapiro, A. (2000): The private company discount, in: *Journal of Applied Corporate Finance*, Winter, pp. 94-101.
- Lakonishok, J.; Shleifer, A.; Vishny, R.W. (1994): Contrarian investment, extrapolation, and risk, in: *The Journal of Finance*, Vol. 49, H. 5, pp. 1541-1578.
- Litzenberger, R.H.; Rao, C.U. (1971): Estimates of the marginal rate of time preference and average risk aversion of investors in electric utility shares: 1960-66, in: *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Spring, pp. 265-277.
- Liu, J.; Nissim, D.; Thomas, J. (1999): *Equity valuation using multiples*, Working Paper, Columbia University, New York.
- Ohlson, J.A. (1990): A synthesis of security valuation theory and the role of dividends, cash flows, and earnings, in: *Contemporary Accounting Research*, Vol. 6, H. 2, pp. 648-676.
- Purnanandam, A.K.; Swaminathan, B. (2001): *Are IPOs underpriced?*, Working Paper, Cornell University.
- Rappaport, A. (2000): *Creating shareholder value*, New York.
- Richter, F. (2001): Simplified discounting rules in binomial models, in: *Schmalenbach Business Review*, vol. 53, July pp. 175-196.

- Richter, F. (2002): Simplified discounting rules, variable growth, and leverage, working paper University of Witten/Herdecke, Germany, forthcoming in Schmalenbach Business Review April 2002.
- Rock, K. (1986): Why new issues are underpriced, in: Journal of Financial economics, Vol. 15, pp. 188-212.
- Ruback, R.S. (2000): Capital cash flows: A simple approach to valuing risky cash flows, Working Paper, Harvard University, Boston.
- Shleifer, A.; Vishny, R.W. (1997): The limits of arbitrage, in: The Journal of Finance, Vol. 52, H. 1, pp. 35-55.
- Zarowin, P. (1990): What determines earnings-price ratios: Revisited, in: Journal of Accounting, Auditing & Finance, Vol. 5, pp. 439-454.

Do German Firms Earn their Cost of Capital Considering Tax Effects Caused by Debt and Provisions ?

June 2002

Andreas Schueler
University of Regensburg, Germany



Agenda

1. Objectives
2. Methodology
3. Data
4. Preliminary Results
5. Conclusions



Objectives of the paper

- Measurement of performance
 - Net present value: Difference between market value and invested capital
 - Invested capital: Initial market value plus cost of capital and capital raised minus dividends paid
- Influence of tax shields on performance
 - Tax shields on debt
 - Tax shields on provisions
- ▶ Measurement of levered and unlevered performance



Literature

- Fama/French, The Corporate Cost of Capital and the Return on Corporate Investment, JoF, 1999, p. 1939-1967:
 - IRR on value as a proxy of cost of capital; value = market value of equity and debt
 - IRR on cost as a proxy of return on cost; cost = book value
 - Real IRR on value: 5.95%
 - Real IRR on cost: 7.38%

$$MV_0 = \sum_{t=1}^T \frac{\text{EBITDA a. t.}_t - \text{Capex}_t}{(1 + \text{WACC})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{\text{FS}_t - \text{FBV}_t}{(1 + \text{WACC})^t} + \frac{\text{TV}_{1996}}{(1 + \text{WACC})^T}$$
$$BV_0 = \sum_{t=1}^T \frac{\text{EBITDA a. t.}_t - \text{Capex}_t}{(1 + \text{IRR})^t} + \sum_{t=1}^T \frac{\text{FS}_t - \text{FBC}_t}{(1 + \text{IRR})^t} + \frac{\text{TV}_{1996}}{(1 + \text{IRR})^T}$$

- Graham, How big are the tax benefits of debt?, JoF, 2000, p. 1901-1940:
 - Mean tax shield on debt 9.7% of firm value
 - Consideration of income tax leads to tax shields between 4% to 7%
 - Estimation of firm specific tax functions to value tax shields



- Kemsley/Nissim, Valuation of the Debt-Tax Shield, forthcoming JoF 2002:
 - Value of tax shield on debt estimated to be 40% of debt balances; net of personal tax disadvantages; approximately 10% of firm value
 - Regression analysis: Dependent variable: Future operating income; independent variables: r_U^* , V_L and $r_U^* t_C * D$
- Schlumberger, Der Beitrag sonstiger Rückstellungen zum Unternehmenswert, PhD-Thesis, Regensburg, 2001:
 - Sample of German DAX100 companies without banks and insurance companies with available data from 1987 to 1997
 - Measurement of tax shields on debt and provisions for the sample period
 - Tax shields on provisions 1.37 * tax shields on debt
- Drukarczyk/Schueler, Alternative Approaches to Value-Based Performance Measurement, in: VBM context and application, edited by Arnold/Davies, 2000, 255-303:
 - Increase invested equity by the cost of capital and consider dividends paid/equity raised
 - Net present value: Difference between market value and invested capital
 - Net economic income: Change in market value plus dividends minus capital charge on invested capital (change in NPV)



Methodology - Assumptions

- Point of reference for calculating net present value: market capitalisation at the beginning of the investment period
- Capital structure is changed without adjusting the investment program
- Market capitalisation minus tax shields = Unlevered market capitalisation

- Changes in the tax system are assumed to be not anticipated in market capitalisation
- Income tax rate: 35% (as suggested by the German Auditors' Association IDW) and sensitivity analysis



Methodology - Valuation

Value of the firm (APV-method): $V_U + TS_D + TS_{Prov} = V_L = E + D$

Tax shield on debt and German imputation system:

t_W Tax on corporate wealth (Assets minus debt and provisions); t_{CL} (*Gewerbeertragsteuer*) Local tax on corporate earnings

Tax shield assuming a perpetuity, fully deductible interest and tax shields as risky as underlying debt:

$$TS_D = \left(t_{CL} + \frac{t_W}{r_D} \right) D$$

Tax shield on provisions under German imputation system:

Payments out of provisions are assumed to occur independent upon using provisions

t_W Tax on corporate wealth see tax shield on debt; perpetuity assumption:

$$TS_{Prov} = \frac{t_W}{r_D} P_{Prov}$$

Assuming payout of earnings, periodic tax shield on provisions: $[t_{CL}(1-t_i) + t_i] \Delta$ provisions

Applying Miller (1977) $D \left\{ 1 - \frac{\left[1 - \left(t_{CL} + \frac{t_W}{r_D} \right) \right] [1 - (1-b)t_i]}{1 - t_i} \right\}$ b for empirical analysis: 0; 0.5; 0.75



Methodology – From levered performance to unlevered performance

Investor buys in t_0 and sells in t_3

$$r_D = r_F = 0,06$$

Corporate tax rate 0,34

Market risk premium 0,05

	0	1	2	3
Debt	200,00	250,00	150,00	150,00
Observed market value of equity	700,00	750,00	850,00	1.000,00
Periodic tax shield		4,08	5,1	3,06
Tax shield perpetuity	68,00	85,00	51,00	51,00
V_L	900,00	1000,00	1000,00	1150,00
Observed β_L		0,95	0,98	0,89
β_U		0,80	0,80	0,80
r_L		10,75%	10,9%	10,45%
r_U		10,00%	10,00%	10,00%
EBIT (= Operating CF)		150,00	150,00	50,00
Interest		-12,00	-15,00	-9,00
EBT		138,00	135,00	41,00
Taxes		-46,92	-45,9	-13,94
Change in debt		50,00	-100,00	0,00
$Div_{L,t}$		141,08	-10,90	27,06

$$\beta_U = \frac{\beta_L}{1 + \frac{D - TS_D}{E}}$$

Observed β_L

β_U

r_L

r_U

Investor capitalizes expected periodic tax shield of t_1 based upon observable debt level in t_0



...continued

NPV given capital structure (Levered NPV)

		IC _{L,t-1}	700,00	634,20	714,10
		IC _{L,t-1} after capital charge	775,28	703,20	788,84
		Div _{L,t}	-141,08	10,90	-27,06
		IC _{L,t}	700,00	634,20	714,10
		Market value of equity	700,00	750,00	850,00
			1.000,00		
		NPV _{L,t}	0,00	115,80	135,90
				238,22	

Unlevered NPV

		IC _{U,t-1}	900,00	891,00	881,10
		IC _{U,t-1} after capital charge	990,00	980,10	969,21
		Div _{U,t}	-99,00	-99,00	-33,00
		IC _{U,t}	900,00	891,00	881,10
		Estimated V _U	832,00	915,00	949,00
			1.099,00		
		NPV _{U,t}	-68,00	24,00	67,90
				162,79	
		NPV _{U,t} - NPV _{L,t}	-68,00	-91,80	-68,00
				-75,43	

Or: 115,8:
 141,08 Dividend
 + 50 Capital gain
 - 75,28 Capital ch. on IC_{L,t-1}

900: Investor does not receive credit for the tax shield perpetuity of t_0



Data

- 179 listed German companies: DAX, MDAX and SMAX
- Balance sheets & income statements; consolidated accounts: German commercial code (HGB), IAS, US-GAAP
- Riskless rate of return & cost of debt: as published by Deutsche Bundesbank
- Corporate tax rates: Imputation system; changes in tax rates are considered
- Data coverage: 1987 to 2000
- Listed for at least 3 years
- Industry definition: CDAX categories suggested by Deutsche Boerse AG

Industry	No. of companies
Automobile	13
Basic Resources	4
Chemicals	6
Construction	19
Consumer Cyclical	14
Financial Services	8
Food & Beverages	6
Industrial	18
Machinery	23
Pharma & Healthcare	18
Retail	22
Software	3
Technology	12
Telecommunications	2
Transportation & Logistics	7
Utilities	4
16	179



Preliminary Results – Tax Shields on Debt vs Tax Shields on Provisions

$b=0$	Periodic TS_D in % of EBIT	Periodic TS_{Prov} in % of EBIT + Incr. Prov.	Perpetuity TS_D in % of V_L	Perpetuity TS_{Prov} in % of V_L
1987			0.071	0.154
1988	0.021	0.163	0.064	0.152
1989	0.018	0.102	0.050	0.097
1990	0.027	0.118	0.059	0.088
1991	0.032	0.130	0.057	0.082
1992	0.044	0.182	0.066	0.090
1993	0.057	0.211	0.060	0.080
1994	0.049	0.171	0.059	0.089
1995	0.039	0.174	0.073	0.100
1996	0.033	0.115	0.040	0.042
1997	0.022	0.082	0.027	
1998	0.012	0.050	0.027	
1999	0.016	0.071	0.027	
2000	0.018	0.035	0.029	
Average	0.030	0.123	0.051	
Avg. 87-97	0.034	0.145	0.057	
Avg. 87-96	0.036	0.152	0.060	0.097

No wealth taxes;
 Δ Provisions is assumed to be 0 for perpetuity



Preliminary Results – Tax Shields on Debt vs Tax Shields on Provisions

b=0.5	Periodic TS_D in % of EBIT	Perpetuity TS_D in % of V_L	b=0.75	Periodic TS_D in % of EBIT	Perpetuity TS_D in % of V_L
1987		0.034	1987		0.015
1988	0.010	0.025	1988	0.004	0.006
1989	0.007	0.013	1989	0.002	-0.006
1990	0.007	0.015	1990	-0.003	-0.007
1991	0.008	0.012	1991	-0.004	-0.010
1992	0.010	0.018	1992	-0.007	-0.006
1993	0.016	0.017	1993	-0.004	-0.005
1994	0.014	0.018	1994	-0.003	-0.002
1995	0.012	0.028	1995	-0.001	0.005
1996	0.013	-0.005	1996	0.003	-0.027
1997	-0.005	-0.030	1997	-0.018	-0.058
1998	-0.012	-0.026	1998	-0.025	-0.053
1999	-0.014	-0.025	1999	-0.029	-0.051
2000	-0.015	-0.026	2000	-0.032	-0.054
Average	0.004	0.005	Average	-0.009	-0.018
Avg. 87-97	0.009	0.013	Avg. 87-97	-0.003	-0.009
Avg. 87-96	0.011	0.018	Avg. 87-96	-0.002	-0.004



Preliminary Results - Levered Performance

$$\text{Index}_{\text{NPV,Levered},t} = \frac{E_t - IE_{L,t}}{E_t} = \frac{\text{NPV}_{L,t}}{E_t}$$

MRP 4.4%

No. of holding periods with positive performance: 52

No. of holding periods with negative performance: 39

Weighted average $r_L = 9.5\%$

Levered Performance

	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
	-0.0001												
	0.187	0.206											
	-0.036	-0.024	-0.278										
	0.000	0.010	-0.220	0.025									
	-0.251	-0.250	-0.548	-0.243	-0.290								
	-0.030	-0.022	-0.257	-0.005	-0.040	0.193							
	-0.134	-0.110	-0.365	-0.095	-0.136	0.119	-0.091						
	-0.260	-0.214	-0.488	-0.204	-0.243	0.034	-0.195	-0.096					
	-0.072	-0.043	-0.257	-0.029	-0.049	0.175	-0.007	0.071	0.155				
	0.025	0.093	-0.057	0.106	0.099	0.259	0.131	0.186	0.252	0.146			
	0.015	0.099	-0.018	0.082	0.101	0.210	0.122	0.162	0.202	0.149	0.078		
	0.041	0.129	0.043	0.118	0.125	0.207	0.136	0.169	0.197	0.146	0.262	0.177	
	0.099	0.189	0.097	0.190	0.190	0.296	0.218	0.258	0.295	0.240	0.177	-0.010	-0.241 13



Preliminary Results - Levered vs Unlevered Performance - Sensitivity

Levered Performance				No. of holding periods with positive performance	
Market risk premium		0.04	0.044		0.05
Income tax rate					
	0.3	56	54		49
	0.35	56	52	49	
	0.4	56	52	49	
Unlevered Performance					
Market risk premium		0.04	0.044	0.05	
Income tax rate		b			
0.3	0	40	39	33	
	0.5	45	44	42	
	0.75	49	47	45	
0.35	0	40	39	33	
	0.5	47	45	44	
	0.75	50	48	47	
0.4	0	40	39	33	
	0.5	49	47	44	
	0.75	51	50	48	



Conclusions

- Levered performance of the sample depends upon the holding period chosen
- Tax shields matter since they are an immediate contribution to net present value.
- The impact of tax shields on debt and provisions is considerable: Tax shields are responsible for classifying a number of holding periods as value generating in terms of levered performance, despite of negative unlevered performance.
- Tax shields on provisions dominate tax shields on debt quite regularly.
- Tax shields on debt and provisions decreased considerably after corporate wealth is not taxed anymore
- The influence of tax effects of debt on performance approaches zero and can turn out to be negative, depending upon the assumed level of tax exempt capital gains.



Symbols

BV	Book value	NPV_L	Levered net present value
D	Market value of debt	NPV_U	Unlevered net present value
Div_L	Levered dividend	OCF	Operating Cash Flow
Div_U	Unlevered dividend	r_D	Expected dividend yield
E	Market value of equity	r_f	Risk free rate of return
EBIT	Earnings before interest and taxes	r_L	Levered cost of equity
EBT	Earnings before taxes	r_M	Expected market rate of return
FBV	Firms bought at value	r_U	Unlevered cost of equity
FBC	Firms bought at cost	t_C	Corporate tax rate
FCF_L	Levered free cash flows	t_{CRE}	Corporate tax rate on retained earnings
FCF_U	Unlevered free cash flows	t_{CL}	Local tax rate on corporate earnings
FS	Firms sold	t_i	Income tax rate
I	Investment	t_W	Tax rate on corporate wealth
IC_L	Levered invested capital (invested equity)	TS	Tax shield on debt
IC_U	Unlevered invested capital	TV	Terminal value
MV	Market value	V_L	Value of the levered company
		V_U	Value of the unlevered company

Implikationen von Aktienkursen und Gewinnprognosen von Finanzanalysten für die Eigenkapitalkosten deutscher Unternehmen

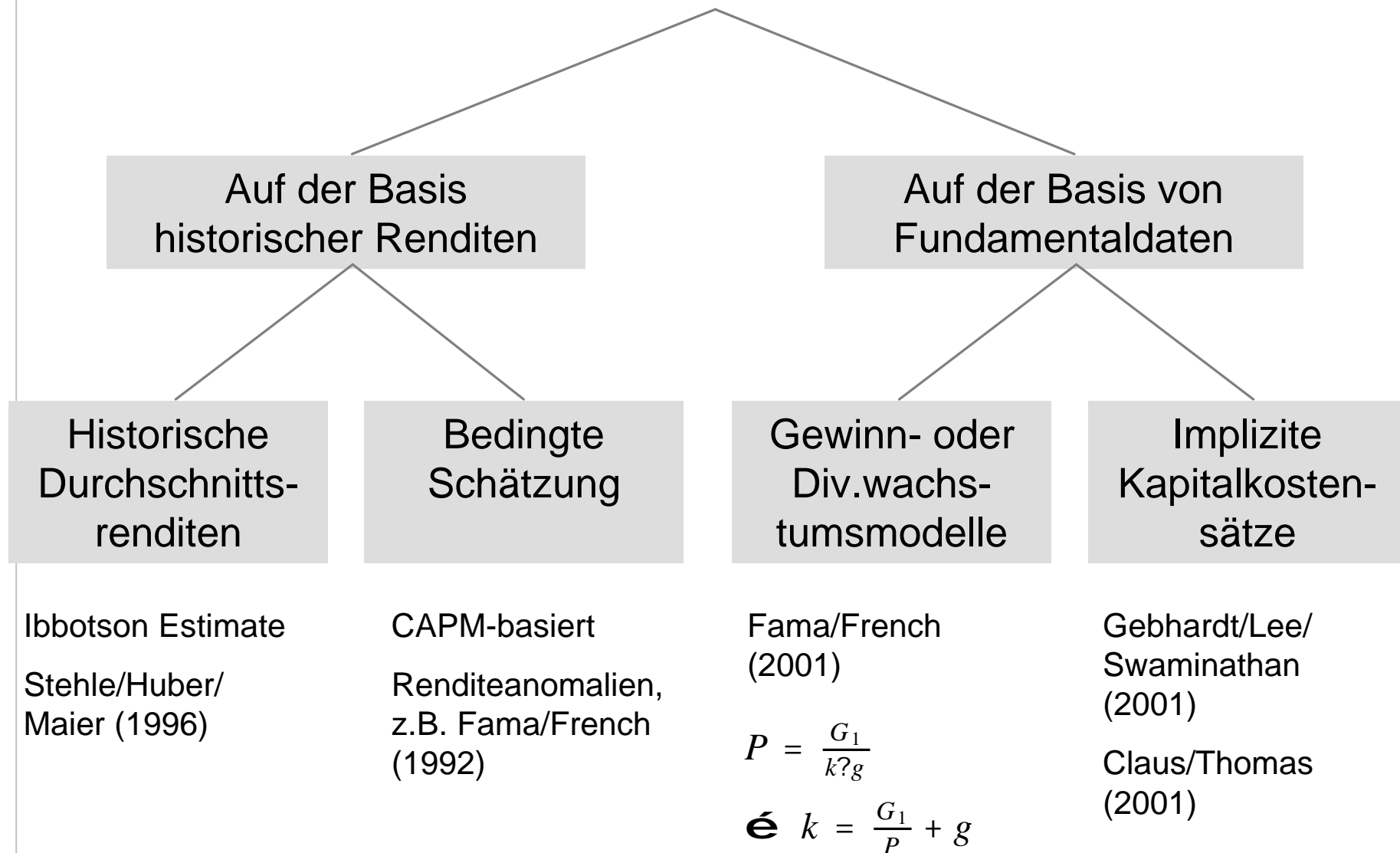
Martin Wallmeier

8. Juni 2002

Gliederung

- 1 Verfahren zur Schätzung der Marktrisikoprämie
- 2 Das Residualgewinnmodell
- 3 Datenbasis und Methodik
- 4 Implizite Kapitalkostensätze
- 5 Optimistische Verzerrung der Gewinnprognosen
- 6 Sensitivitätsanalyse
- 7 Fazit: Möglichkeiten und Grenzen des Ansatzes

Verfahren zur Schätzung erwarteter Aktienrenditen



Bewertung auf der Basis von Residualgewinnen

Aktienkurs als Buchwert EK + Barwert einer Folge von erwarteten Residualgewinnen:

$$P_0 = B_0 + \frac{E\dot{X}_1 - kB_0}{1+k} + \frac{E\dot{X}_2 - kB_1}{\dot{Y}1+k\dot{p}^2} + \frac{E\dot{X}_3 - kB_2}{\dot{Y}1+k\dot{p}^3} + \dots$$

Voraussetzung: $B_t = B_{t+1} + X_t$? Nettodividende t für $t \geq 1$

Symbole:

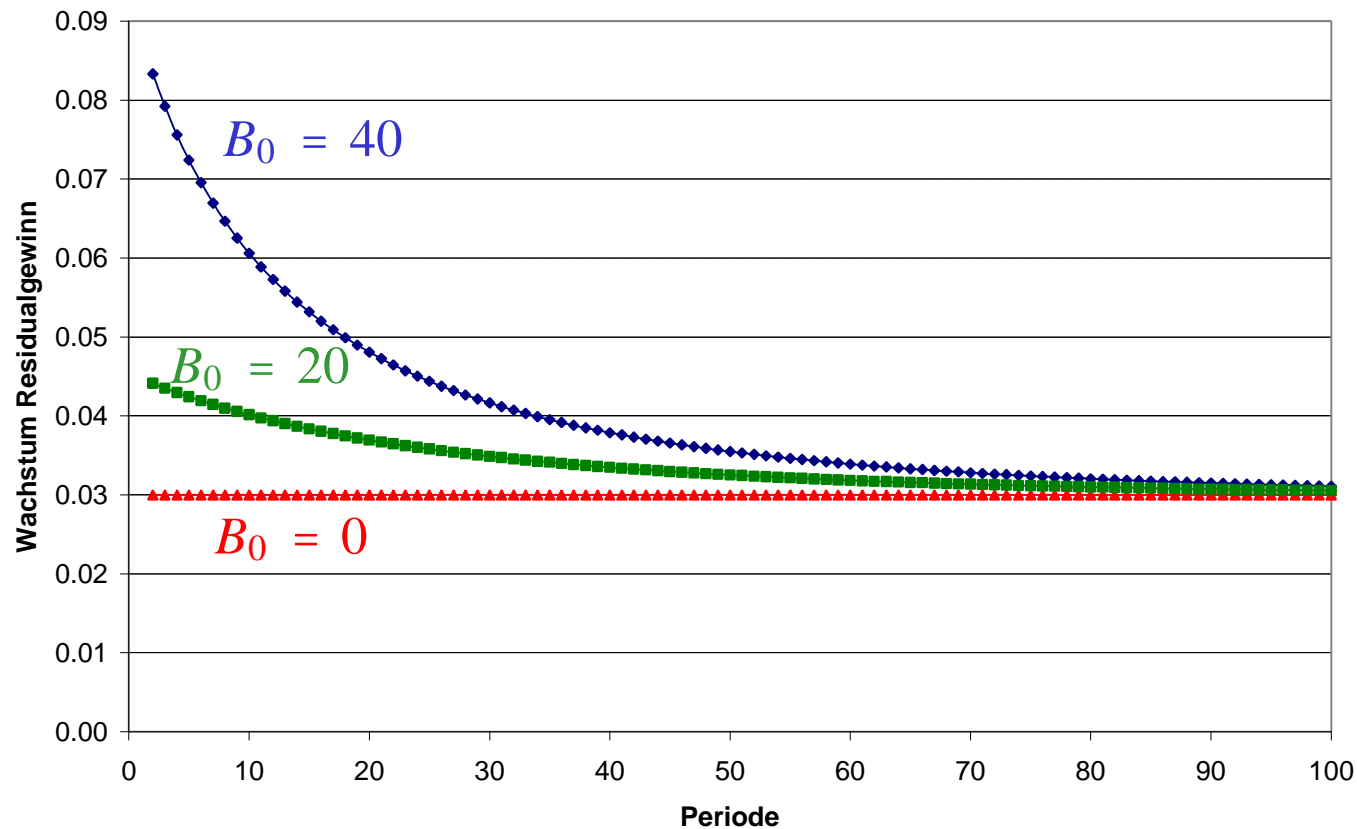
- P_0 : gegenwärtiger Aktienkurs
- B_t : Buchwert des Eigenkapitals im Zeitpunkt t
- X_t : Gewinn der Periode von $t-1$ bis t
- k : Kapitalkostensatz

Häufige Annahme: Konstantes Wachstum ab $t = 5$

$$P_0 = B_0 + \sum_{t=1}^5 \frac{E\dot{X}_t - kB_{t-1}}{\dot{Y}1+k\dot{p}^t} + \frac{\dot{Y}1+g\dot{p}E\dot{X}_5 - kB_5}{\dot{Y}k\dot{p}\dot{Y}1+k\dot{p}^5}$$

Restwert und Wachstum der Residualgewinne

- Annahmen:**
- freier Cashflow an Eigentümer in $t=1$: 5 EUR
 - gleich hoher Gewinn in $t=1$
 - konstantes Wachstum der FCF von $g = 3\%$
 - konstanter Kapitalkostensatz von $k = 8\%$
- ▶ Marktwert EK = $5 / (0,08 - 0,03) = 100 \text{ EUR}$



DCF-Bewertung versus Residualgewinnmodell

- ◆ „Steady state“ sei definiert als Phase mit konstant wachsenden FCF
- ◆ Es gilt:

$$\sum_{t=1}^T \frac{E_t FCF_t}{(1+k)^t} + \frac{E_{T+1} FCF_{T+1}}{k(1+k)^T} = B_0 + \sum_{t=1}^T \frac{E_t AE_t}{(1+k)^t} + \frac{E_{T+1} AE_{T+1}}{k(1+k)^T}$$

genau dann, wenn:

$$B_0 = \frac{I_{T+1} - A_{T+1}}{g} \geq \sum_{t=1}^T (I_t - A_t)$$

FCF : Freier Cashflow für Anteilseigner

AE : „Abnormal Earnings“

I - A : Operativer Gewinn - FCF

= Investitionen - Abschreibungen + Kredittilgung - Kreditaufnahme

Datenbasis

- ◆ I/B/E/S Summary History
- ◆ Konsensusprognosen für deutsche Unternehmen seit 1987
- ◆ Anzahl Schätzungen, Mittelwert, **Median**, Standardabweichung, Maximum, Minimum
- ◆ Prognosen und Realisationen in der Form von DVFA/SG-Gewinnen
- ◆ Rückwärtsbereinigung aller früheren Werte nach Kapitalerhöhungen aus Gesellschaftsmitteln und Veränderungen des Aktiennennwerts
- ◆ Monatliche Aktualisierung

- ◆ DAX 100-Gesellschaften
- ◆ Untersuchungszeitraum 1991 bis 2000
- ◆ nur Daten berücksichtigt, die auf mind. 3 Einzeleingaben beruhen

Implizite Kapitalkostensätze

- ◆ Gegeben eine Abfolge erwarteter Gewinne, wird jener Diskontierungssatz k gesucht, der mit dem beobachteten Aktienkurs kompatibel ist:

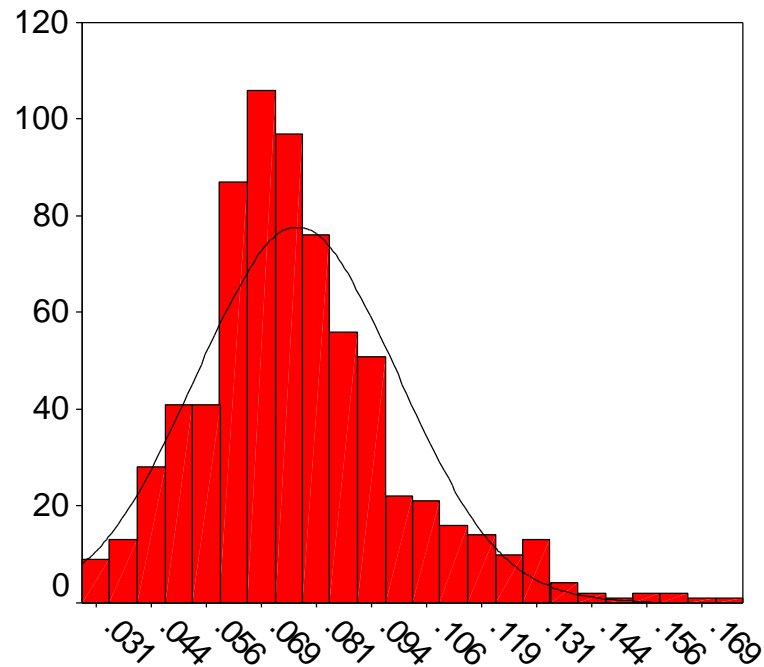
$$P_0 = B_0 + \sum_{t=1}^5 \frac{EY_t \cdot B_{t-1}}{1+k^t} + \frac{Y_1 + g \cdot EY_5 \cdot B_5}{k - g} \cdot \frac{1}{1+k^5}$$

Prämissen „Basismodell“

- ◆ Explizite Gewinnschätzungen für mindestens 2 Jahre vorhanden
- ◆ Annahme der „Long Term Growth Rate“ bis $T = 5$
- ◆ Risikofreier Zinssatz $r_f =$ Umlaufrendite 10-jähriger Bundesanleihen
- ◆ Nach Detailplanungszeitraum Wachstum mit $g = 0,025$
- ◆ Ausschüttungsquote = 50%

Histogramme impliziter Kapitalkostensätze

alle Jahre

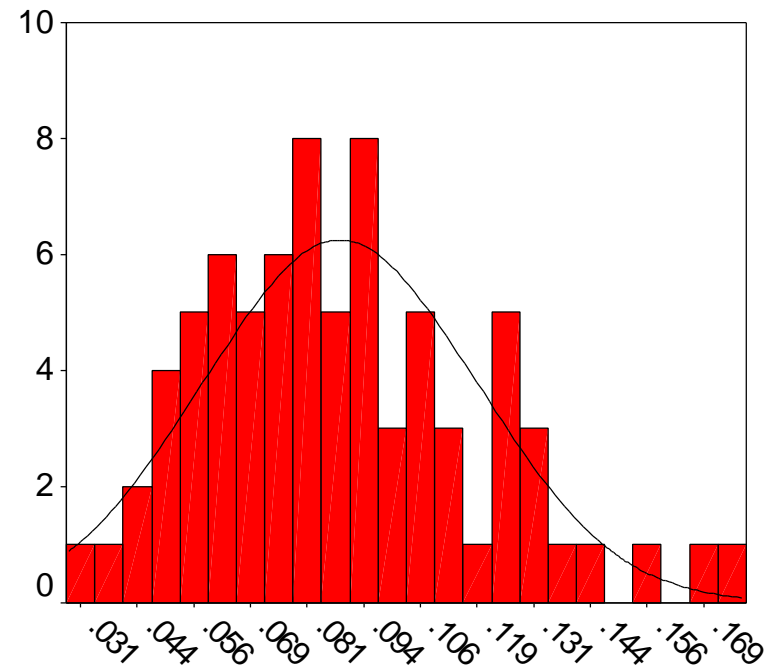


N = 714

Mittelwert = 0,077

Std.abw. = 0,02

Jahr 2000



N = 76

Mittelwert = 0,090

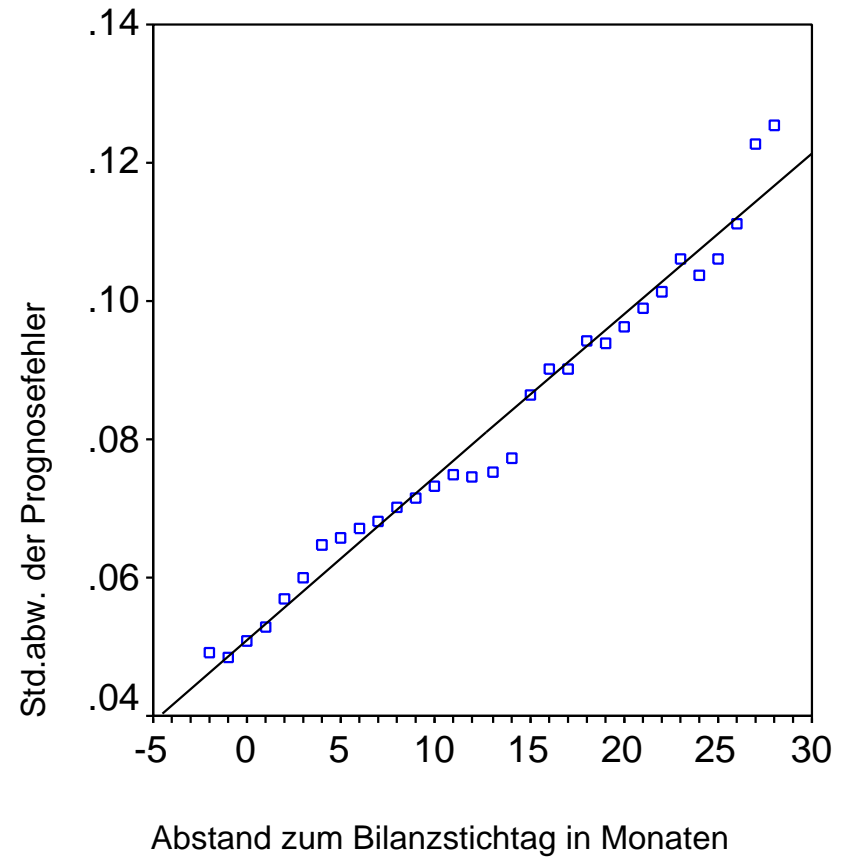
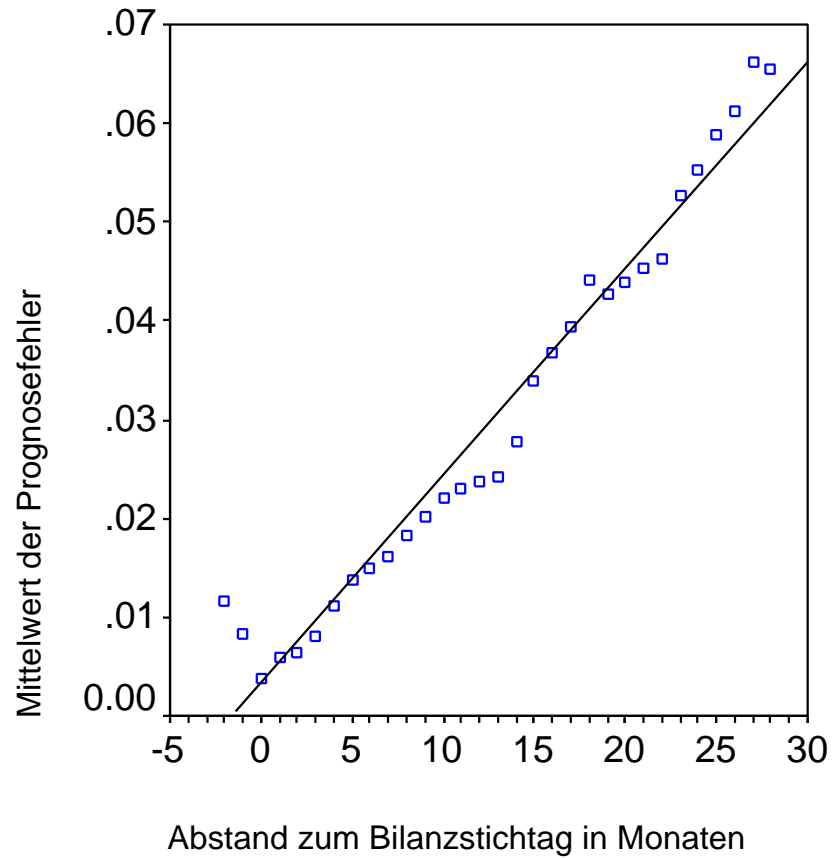
Std.abw. = 0,03

Wertkomponenten

		Prozentualer Anteil am Portfoliowert						
Jahr	Anzahl	B_0	ae_1	ae_2	ae_3	ae_4	ae_5	Restwert
1991	60	71.6	1.8	2.1	1.8	1.5	1.3	19.9
1992	68	69.8	1.9	2.2	1.8	1.5	1.2	21.6
1993	67	76.9	0.4	1.2	1.1	1.0	0.8	18.7
1994	73	54.4	0.4	1.5	2.3	2.1	1.9	37.4
1995	70	60.6	0.8	1.8	2.1	1.9	1.7	31.1
1996	68	57.8	1.9	2.4	2.4	2.0	1.7	31.9
1997	73	50.9	2.0	2.5	2.7	2.4	2.1	37.6
1998	77	42.6	2.1	2.5	2.8	2.5	2.3	45.1
1999	82	42.8	1.8	2.2	2.4	2.4	2.3	46.2
2000	76	39.3	1.8	2.1	2.3	2.1	2.0	50.5

Mittlere Genauigkeit und Streuung im Prognosezeitraum

Prognosen für das Jahr 2000



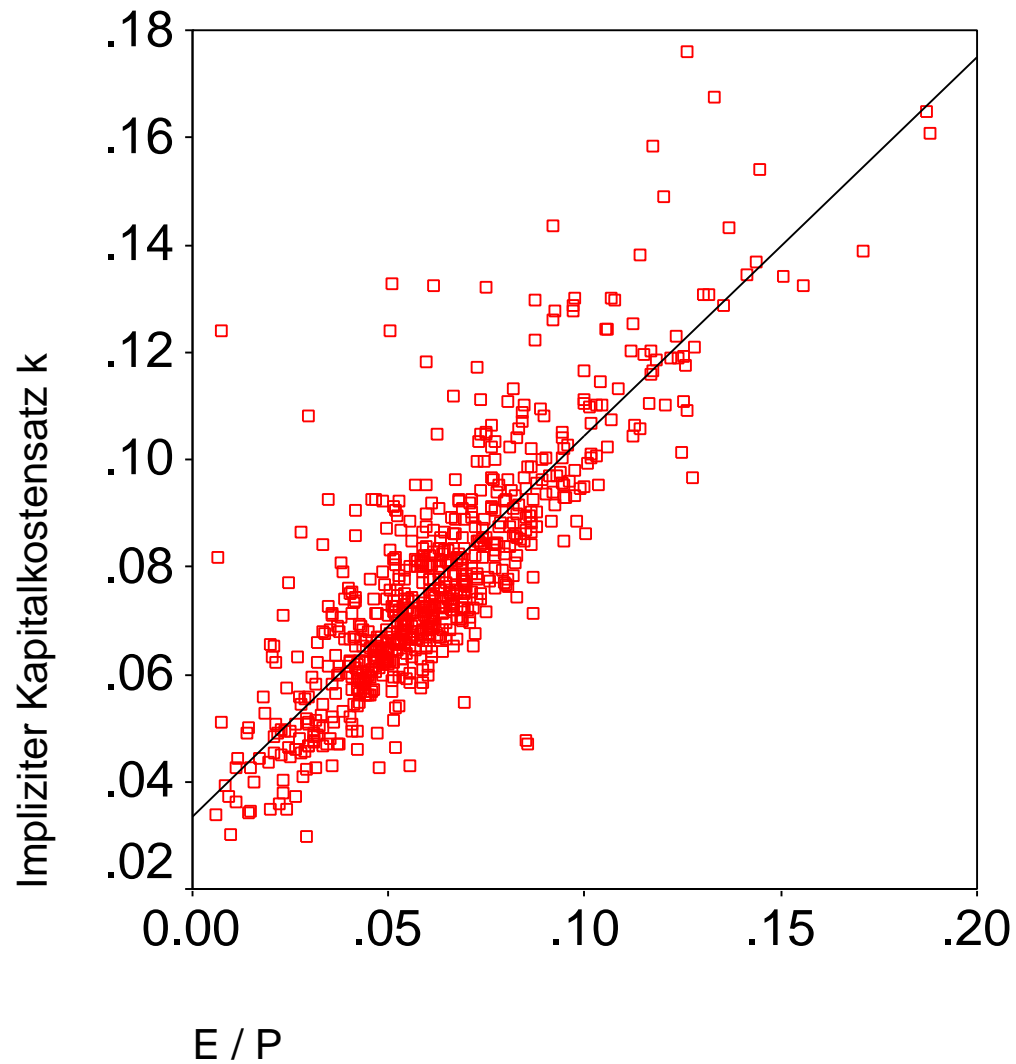
Implizite Kapitalkosten im Basisfall

Jahr	R_f	k kap.gew.	k CT 2001	$k - R_{f \text{ n.St.}}$	E / P kap.gew.	k gleichgew.
1991	8.24%	8.96%	9.45%	3.60%	8.40%	7.62%
1992	7.33%	8.04%	10.05%	3.28%	7.62%	7.36%
1993	5.85%	7.02%	6.84%	3.21%	5.81%	6.89%
1994	7.46%	7.60%	8.56%	2.75%	4.60%	6.61%
1995	6.07%	8.24%	7.92%	4.29%	5.82%	7.33%
1996	5.79%	7.92%	8.55%	4.15%	6.57%	7.44%
1997	5.33%	8.17%	7.86%	4.71%	6.29%	8.09%
1998	3.86%	7.70%		5.20%	5.59%	8.10%
1999	5.15%	7.63%		4.29%	5.20%	8.89%
2000	4.89%	6.48%		3.30%	4.43%	8.97%

Sensitivitätsanalyse

Jahr	g = 0	g = 0,025	g = 0,05	g = 0,025 d = 0,3
1991	8.48%	8.96%	9.63%	8.50%
1992	7.52%	8.04%	8.75%	7.65%
1993	6.55%	7.02%	7.71%	6.73%
1994	6.72%	7.60%	8.63%	7.32%
1995	7.48%	8.24%	9.08%	7.89%
1996	7.10%	7.92%	8.89%	7.57%
1997	7.28%	8.17%	9.19%	7.83%
1998	6.64%	7.70%	8.87%	7.41%
1999	6.54%	7.63%	8.83%	7.36%
2000	5.27%	6.48%	7.79%	6.27%

Implizite Kapitalkosten und Gewinn-Kurs-Verhältnis



R-Qu. = 0.6932

Fazit: Möglichkeiten und Grenzen des Ansatzes

- ◆ Zugrunde liegendes Modell
 - Stark vereinfachende Annahmen
 - z.B. keine explizite Modellierung des Werteeinflusses der Finanzierungsstruktur
 - z.B. Annahme konstanter Kapitalkostensätze und Inflationsraten
 - Konstantes Wachstum der Residualgewinne in Fortführungsphase fraglich
 - Gleiche Länge des Detailplanungszeitraums für alle Unternehmen
 - Kein fundierter Anhaltspunkt für Standardfehler der geschätzten Kapitalkostensätze
- ◆ Datengrundlage
 - Nur Gewinnprognosen, keine Angaben über Erwartungswerte der freien Cashflows
 - Kurzer Detailplanungszeitraum; selbst für diesen Daten z.T. unzuverlässig ($N < 3$)
 - Nur Verteilungsparameter für Gewinnprognosen verfügbar, nicht Verteilung selbst
 - Gewinnprognosen der Finanzanalysten verzerrt
- ◆ Ergebnisse
 - Starke Abhängigkeit der Ergebnisse von der angenommenen Wachstumsrate für die Zeit nach dem Detailplanungszeitraum
 - Aber: Auch bei optimistischer Parameterwahl ergibt sich deutlich niedrigere Risikoprämie, als vielfach angenommen.

Capital Budgeting in Arbitrage Free Markets

Jörg Laitenberger and Andreas Löffler*

June 9, 2002

Abstract

In capital budgeting problems the valuation of future cash-flows is done using as discount factors the expected one period returns of the investment. In this paper we establish a theory that relates this approach to the assumption that markets are free of arbitrage. Our goal is to uncover implicit assumptions on the set of cash-flow distribution that are suitable for the capital budgeting method. As results we obtain that the set of admissible cash-flow distributions is large in the sense that no particular structure of the evolution of the distributions is implied. We give stylized examples that demonstrate that even strong assumptions on the return distribution do not restrain the shape of the cash-flow distributions. In a subsequent analysis we characterize the cash-flow distributions under the additional assumption of a certain dividend yield. In this case strong properties for the evolution of the distributions obtain.

keywords: cost of capital, capital budgeting
JEL-class.: G 31, D46

1 Introduction

It is well known today that in arbitrage free markets the value of a claim is given by the sum of its expected cash-flows discounted at the riskless interest rate. The expectation is taken with respect to the so-called risk neutral measure that is usually different from the subjective probability measure of the investor. In the context of

*Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Universität Hannover, Königsworther Platz 1, D-30167 Hannover. Corresponding author [Andreas Löffler \(al@wacc.de\)](mailto:al@wacc.de).

project valuation both scientist and practitioners tend to use the so called capital budgeting method, which consists in discounting the expected cash-flows with the cost of capital. The expectation is now taken with regards to the subjective probability of the investor. The cost of capital are given by the expected rate of return of the investment. In this paper we establish a theory that relates the latter approach to the assumption that markets are free of arbitrage. Our goal is to uncover implicit assumptions on the set of cash-flow distribution that are suitable for the capital budgeting method.

If the discount rate is derived from an equilibrium model as the CAPM the above problem reduces to the question under what assumptions a myopic valuation principle can be applied. This problem was considered by Fama (1977), Sick (1986), Black (1988) and Franke (1984).

Fama (1977) assumed that the cash-flows form a martingale. Later Fama (1996) has pointed out that in the case of lognormality (as it is assumed in the CAPM) the distributions of future returns become skewed right. Sick (1986) investigated comparable additive or multiplicative cash-flow process (his assumptions A2 and A3). In Black (1988) both the cash-flows of the project and the cash-flow of the market portfolio are joint normal.

Whereas Fama (1977), Sick (1986) and Black (1988) considered cash-flows having a particular stochastic structure, Franke (1984) instead made no assumptions for the (exogenous) dividend process except regularity conditions. Using a multiperiod exchange economy with HARA investors he derived conditions for a period-by-period application of one-period asset pricing models. Since we will not use an equilibrium model our paper does not directly compare to these results.

Within an arbitrage model, Richter (2001) tackled the problem of constant discount rates. He used a binomial model and was able to derive equations that implied a constant discount rate for future cash-flows. Therefore, a particular stochastic structure of the cash-flows is evident. In particular, within the binomial model only one ratio of the growth rate for up- and down-movements will lead to a constant discount rate.

In our short note we relate the question of constant cost of capital not to an equilibrium concept. Furthermore, we do not want to restrict ourselves to a particular distribution of future cash-flows. Instead, we will use a fairly general model to derive our results. We start with a definition of discount rates as future returns and ask under what assumptions these discount rates will be deterministic and in particular constant. It turns out, that the set of admissible cash-flow distributions is large in the sense that no particular structure can be found.

A first example shows that even in a model where cash-flows possess any given struc-

ture in every future time period, cost of capital can be constant. Therefore, maybe counterintuitively, the variance or the skewness of the cash-flow distributions do not change through time. If we add another assumption about the dividend yield of the firm it will turn out that the cash-flow increments have to be uncorrelated. This is much weaker than saying that the increments are independent as it is usually assumed in the random walk hypothesis.¹ It will turn out that these conditions are not only sufficient but in a particular sense also necessary for the cost of capital to be constant.

The next section presents an example of a firm where the cash-flows have only two possible realizations in any future time, but cost of capital are constant and the market is free of arbitrage. A theory of deterministic cost of capital and with cash-flows with a certain dividend yield is given in the following section. The last section closes the paper.

2 Constant Cost of Capital: An Example

Let (Ω, \mathcal{F}, P) be a probability space and a filtration \mathcal{F}_t (for details see Williams (1991)). The world ends in T , $T = \infty$ is possible. A firm realizes uncertain cash-flows $\tilde{C}F_t$ that are \mathcal{F}_t -measurable. The value of the firm at time t is \tilde{V}_t . The riskless interest rate is for simplicity time independent and r_f . If the market is free of arbitrage there is a risk neutral probability measure Q such that the following is true (see Harrison & Kreps (1979))

$$\tilde{V}_t = \frac{E_Q[\tilde{V}_{t+1} + \tilde{C}F_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1 + r_f}, \quad (1)$$

where $E_Q[\cdot | \mathcal{F}_t]$ is the conditional expectation under the risk neutral probability.

At any future time t the rate of return one period ahead from holding a share of the company is

$$\tilde{r}_t := \frac{\tilde{V}_{t+1} + \tilde{C}F_{t+1}}{\tilde{V}_t} - 1. \quad (2)$$

In a world with uncertainty \tilde{r}_t will be a random variable. The so-called cost of capital are the conditional expectations of the one period returns. Our goal is to clarify the relationship between arbitrage free markets and capital budgeting, where by capital budgeting we understand the device to compute the market value of future cash flows by discounting the expected values of the future cash flows by the period-by-period expected returns.

¹Uncorrelated variables are necessarily independent only if they are joint normal.

While the period-by-period returns may be uncertain, to use the concept of capital budgeting the conditional expectation of the period-by-period returns have to be known without uncertainty for any future period, that is

$$\tilde{k}_t = E[\tilde{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{E[\tilde{V}_t + \tilde{C}F_t | \mathcal{F}_{t-1}]}{\tilde{V}_{t-1}} - 1 \quad (3)$$

is deterministic. With (3) \tilde{r}_t will be serially uncorrelated². This is a priori not restraining much the distribution of $\tilde{C}F_t$ and \tilde{V}_t .

To this end consider for example a sequence of iid random variables $\tilde{C}F_t$ for $t = 1, \dots$. Let two probability measures Q, P given such that

$$E_Q[\tilde{C}F_t] = r_f, \quad E[\tilde{C}F_t] = k \neq r_f.$$

The value of the firm is given by

$$\tilde{V}_t(\omega) := 1. \quad (4)$$

Notice that the value of the firm is not a random variable anymore, although we continue to use the tilde. It is straightforward to verify that this model is free of arbitrage: given the definition of the riskless interest rate we have

$$\frac{E_Q[\tilde{C}F_{t+1} + \tilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\tilde{V}_t(\omega)} = 1 + r_f.$$

showing our model is free of arbitrage. On the other hand, the cost of capital are given by

$$\frac{E[\tilde{C}F_{t+1} + \tilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\tilde{V}_t} = 1 + k.$$

We arrive at a situation where the cost of capital of our firm are constant although the risk of the cash flows does not change: in every period the cash flows are given by the same random variable. The risk of the cash-flows does not increase. The value of the firm can be evaluated by discounting the expected cash-flows using the cost of capital. In this case the value of the firm obtains as

$$V_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{E[\tilde{C}F_t]}{(1+k)^t} = 1$$

²If the cost of capital are deterministic the returns are necessarily uncorrelated. Let $s > t$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\tilde{r}_s, \tilde{r}_t] &= E[\tilde{r}_s \tilde{r}_t] - E[\tilde{r}_s]E[\tilde{r}_t] \\ &= E[\tilde{r}_t E[\tilde{r}_s | \mathcal{F}_t]] - k_s k_t \\ &= E[\tilde{r}_t k_s] - k_s k_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notice that in our example the expectation and even the variance of the future cash-flows remain constant. Hence, constant cost of capital do not imply a greater risk measured in terms of variance. This effect is only obtained when the cash-flows under consideration are correlated. In our example this is the case. A straightforward calculation shows that any two cash-flow increments are highly correlated.³

In this sense the behavior of cash-flows and returns observed in our example is only obtained under the very special conditions the example was built on. In a real world environment this seems to be a rather unusual behavior (**Wieso? Beispiel? Empirie?**). In the following we are interested in the behavior of cash-flows when we prevent this sort of correlation. In this case it turns out that much more can be said about the implications of constant or deterministic cost of capital.

3 Cash-flows with a given dividend yield

Define the dividend ratio of a cash-flow distribution as

$$\tilde{d}_t := \frac{\tilde{C}F_t}{\tilde{V}_t}. \quad (5)$$

It is a standard assumption in multiperiod valuation problems to assume that this ratio is deterministic.⁴ If this is the case and the cost of capital are deterministic, then the cash-flows have to satisfy the relation

$$\forall t \quad E[\tilde{C}F_{t+1} - \tilde{C}F_t | \mathcal{F}_t] = g_t \cdot \tilde{C}F_t. \quad (6)$$

where g_t is deterministic. Before we discuss and prove our main result we want to discuss the above property of future cash-flows. First, we claim that our assumption is equivalent by saying that the increase in future cash-flows are (conditional) uncorrelated. This is much weaker than saying (as it is usually assumed in the random walk hypothesis) that the increments are independent from past cash-flows. Only for normally distributed random variables uncorrelated variables are necessarily independent.

Proposition 1 *For condition (6) to hold it is sufficient and necessary that the cash-flows can be written as*

$$\tilde{C}F_{t+1} = (1 + g_t)\tilde{C}F_t + \tilde{\varepsilon}_{t+1} \quad (7)$$

³When $\tilde{C}F_t$ are independent, then obviously the increments $\tilde{C}F_t - \tilde{C}F_{t-1}$ are correlated with

$$\text{Cov}[\tilde{C}F_t - \tilde{C}F_{t-1}, \tilde{C}F_{t+1} - \tilde{C}F_t] = -\text{Var}[\tilde{C}F_t].$$

⁴This is for instance the underlying assumption in Merton's continuous dividend-yield option pricing model (Merton (1973)).

where ε_t are uncorrelated with expectation zero.

Proof. Let $\tilde{\varepsilon}_t$ be defined as in (7). Using (6) these ε_t obviously have expectation zero. The correlation between two increments can be written as

$$\text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_{t+1}, \tilde{\varepsilon}_{s+1}) = E[(\tilde{C}F_{t+1} - (1 + g_t)\tilde{C}F_t) \cdot (\tilde{C}F_{s+1} - (1 + g_s)\tilde{C}F_s)].$$

Let $s < t$, then using the law of iterated expectation (see for example Williams (1991, p. 88)) this can be rearranged to

$$\text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_{t+1}, \tilde{\varepsilon}_{s+1}) = E[(\tilde{C}F_{s+1} - (1 + g_s)\tilde{C}F_s) \cdot E[\tilde{C}F_{t+1} - (1 + g_t)\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_{s+1}]].$$

But the right hand side is zero since

$$E[(\tilde{C}F_{t+1} - (1 + g_t)\tilde{C}F_t) | \mathcal{F}_{s+1}] = E[E[(\tilde{C}F_{t+1} - (1 + g_t)\tilde{C}F_t) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_{s+1}] = 0$$

and hence one part of our claim is shown. The other direction is trivial. \blacksquare

We furthermore notice that the claimed structure of future cash-flows (6) seems to be the discrete time analogue of the assumption of a Brownian Motion. In the later case the stock price process satisfies

$$\frac{dS}{S} = (r + d)dt + \sigma dW$$

and this is the same as to say that the (infinitesimal) increase dS is uncorrelated to the current stock prize.

At first glance it is not clear what rôle the assumption of a deterministic dividend ratio plays. Therefore we will show a much stronger result. We will prove that this deterministic dividend yield is an undispendible condition. We show that deterministic cost of capital and our cash-flow assumption imply a deterministic dividend yield. Furthermore, it will turn out that our cash-flow property is not only necessary for cost of capital to be constant but also sufficient. Our result is summarized in the following proposition.

Proposition 2 *Assume the market is free of arbitrage. If two of the following conditions are satisfied the third follows*

- (i) for all t the cost of capital \tilde{k}_t are deterministic,
- (ii) there are real numbers $g_t > 0$ such that the relation (6) holds,
- (iii) for all t the dividend ratios \tilde{d}_t are deterministic with $d_t > 0$.

Proof. We start with (i), (ii) \implies (iii). From (3), (6) and the law of iterated expectation it follows for all t

$$V_t = \tilde{C}F_t \cdot \sum_{s=t+1}^T \frac{(1+g_t) \cdots (1+g_{s-1})}{(1+k_{t+1}) \cdots (1+k_s)} =: \tilde{C}F_t \cdot d_t^{-1}$$

where the dividend ratios d_t is deterministic. The d_t satisfy the relation

$$d_{t-1}^{-1} \cdot \frac{1+k_{t-1}}{1+g_{t-1}} = 1 + d_t^{-1}. \quad (8)$$

Now (ii), (iii) \implies (i). We have from (1), (3) and

$$1 + \tilde{k}_t = \frac{E[(1 + d_{t+1}^{-1}) \tilde{C}F_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{d_t^{-1} \tilde{C}F_t} = (1 + d_{t+1}^{-1})(1 + g_t) d_t$$

and hence the cost of capital must be deterministic.

To show (i), (iii) \implies (ii) we start with

$$\begin{aligned} 1 + k_t &= \frac{E[\tilde{C}F_{t+1} + \tilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{V_t} \\ &= \frac{(1 + d_{t+1}^{-1}) E[\tilde{C}F_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{d_t \tilde{C}F_t} \quad \text{since (5)} \end{aligned}$$

and this is indeed (6). ■

In our present formulation we assume distributions of cash-flows $\tilde{C}F_t \neq 0$ in every period $t \leq T$. This rules out for instance the case of having a single cash-flow $\tilde{C}F_T$ at time T and no cash-flows at any other time. In this case condition (6) would enforce $E[\tilde{C}F_T] = 0$. In order to allow for potentially no cash-flows at some periods, $\tilde{C}F_t$ can be replaced by \tilde{V}_t in (6) leaving all results of the proposition valid.

Note that under the assumptions of proposition 2 the expected returns k_t are not only the appropriate cost of capital for the entire firm, but every single cash-flow $\tilde{C}F_t$ is to be valued using k_t as discount factors. This obtains as follows. The value of the firm at time u can be computed with the risk neutral approach using the risk neutral probability measure Q . If the cost of capital are deterministic a similar equation for \tilde{V}_u can be established using the subjective probability measure:

$$\tilde{V}_u = \sum_{t=u+1}^T \frac{E_Q[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_u]}{(1+r_f)^{t-u}} = \sum_{t=u+1}^T \frac{E[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_u]}{\prod_{s=u+1}^t (1+k_s)}.$$

The following proposition demonstrates that not only both sums lead to the same result but that this is also true for every summand. Hence, cost of capital turns out to be a simple way of evaluating the expected cash-flows under the subjective probability measure:

Proposition 3 *If the conditions of proposition 2 are satisfied for any $t > s \geq 1$, then the value of a single cash-flow $\tilde{C}F_t$ obtains as*

$$\frac{E_Q[\tilde{C}F_t|\mathcal{F}_s]}{(1+r_f)^{t-s}} = \frac{E[\tilde{C}F_t|\mathcal{F}_s]}{\prod_{u=s+1}^t(1+k_u)}. \quad (9)$$

Proof. To show this claim we use (ii)

$$\begin{aligned} \frac{E_Q[d_t \tilde{C}F_t + \tilde{C}F_t|\mathcal{F}_{t-1}]}{1+r_f} &= V_{t-1} = d_{t-1} \tilde{C}F_{t-1} \\ \Rightarrow \frac{E_Q[\tilde{C}F_t|\mathcal{F}_{t-1}]}{1+r_f} &= \frac{(1+g_{t-1})\tilde{C}F_{t-1}}{1+k_{t-1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Taking the expectation $E_Q[\cdot|\mathcal{F}_{t-2}]$ and applying the law of iterated expectation gives us

$$\frac{E_Q[\tilde{C}F_t|\mathcal{F}_{t-2}]}{1+r_f} = \frac{E_Q[(1+g_{t-1})\tilde{C}F_{t-1}|\mathcal{F}_{t-2}]}{1+k_{t-1}}$$

The right hand side can be further simplified using (10) (with $t-1$)

$$\frac{E_Q[\tilde{C}F_t|\mathcal{F}_{t-2}]}{1+r_f} = \frac{(1+r_f) \frac{(1+g_{t-2})(1+g_{t-1})\tilde{C}F_{t-2}}{1+k_{t-2}}}{1+k_{t-1}}$$

or with (6)

$$\frac{E_Q[\tilde{C}F_t|\mathcal{F}_{t-2}]}{(1+r_f)^2} = \frac{E[\tilde{C}F_{t-2}|\mathcal{F}_{t-2}]}{(1+k_{t-1})(1+k_{t-2})}.$$

Continuing our calculations we arrive at the desired result. ■

4 Conclusion

Applications: Insurance, Real options

References

- Black, F. (1988), 'A simple discounting rule', *Financial Management* 17(2), 7-11.
 Fama, E. F. (1996), 'Discounting under uncertainty', *Journal of Business* 69(4), 415-428.

-
- Fama, E. (1977), 'Risk-adjusted discount rates and capital budgeting under uncertainty', *Journal of Financial Economics* **5**, 3-24.
- Franke, G. (1984), 'Conditions for myopic valuation and serial independence of the market excess return in discrete time models', *Journal of Finance* **39**(2), 425-442.
- Harrison, J. & Kreps, D. (1979), 'Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets', *Journal of Economic Theory* **20**, 381-408.
- Merton, R. (1973), 'An intertemporal capital asset pricing model', *Econometrica* **41**, 867-888.
- Richter, F. (2001), 'Simplified Discounting Rules In Binomial Models', *Schmalenbach Business Review* **53**, 175-1967.
- Sick, G. A. (1986), 'A certainty-equivalent approach to capital budgeting', *Financial Management* **15**, 23-32.
- Williams, D. (1991), *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge.

Miles–Ezzell’s WACC Approach Yields Arbitrage

Andreas Löffler

FB Wirtschaftswissenschaften, Universität Hannover,
Königsworther Platz 1,
30167 Hannover, Germany.

This version: December 2001.

A simple counterexample shows that the WACC formula developed by Miles and Ezzell can be used to create an arbitrage opportunity. The only consequence to be drawn is that their WACC approach cannot be applied under the circumstances assumed by Miles and Ezzell.

We show how the WACC theory has to be modified in order to obtain proper results. We develop a theory in continuous as well as discrete time. In discrete time it turns out that with a further assumption on the cash flows of the firm formulas similar to Miles and Ezzell’s results can be verified. This assumption requires that the increment of cash flows has conditional expectation proportional to the current cash flow. This condition can be interpreted as a discrete time analog of a Brownian motion.

keywords: WACC, leverage ratio, tax shield

JEL-class.: G 31, H34

1 Introduction

A firm does create value not only by its cash flows but also by the way it is financed. Debt interest payments are tax-deductible, and therefore debt financing will be somewhat cheaper than equity financing. The difference of the values of the levered and

the unlevered firm is known as the tax shield. It was already shown by (Modigliani and Miller 1963) how such a tax shield is to be evaluated if the cash flow of the firm form a perpetual rent. (Myers 1974) extended this approach by assuming that the firm determines the future amount of debt today. This approach is known as APV (adjusted present value) theory. In a recent paper (Clubb and Doran 1995) have extended Myers' APV-formula for a debt management policy involving a one-period lag in the revision of the firm's debt schedule.

In many cases the assumption of a deterministic future amount of debt is not satisfied, since especially in practical applications the target of a financing decision is given by the leverage ratio of the firm instead of the amount of debt (see for example (Brealey and Myers 1996, p. 513) or (Ross et al. 1996, p. 463)). In this case it cannot be assumed that the tax relief will be riskless since tax payments are uncertain:

“Even though the firm might issue riskless debt, if financing policy is targeted to realized market values, the amount of debt outstanding in future periods is not known with certainty (unless the investment is riskless) ...”
(Miles and Ezzell 1980, p. 721).

In a discrete time setup¹ and under the sharp restriction of a constant leverage ratio Miles and Ezzell (see (Miles and Ezzell 1980)) developed a theory how these tax payments should be evaluated. This approach is known as weighted average cost of capital theory (WACC, see for example (Grinblatt and Titman 1998, chapter 12.3)). In this introduction we present a simple model in which this WACC formula leads to an arbitrage opportunity. Hence, their formula cannot be applied without further assumptions.

This paper will develop a new WACC theory in continuous time as well as discrete time. Our approach uses an arbitrage argument and will heavily rely on the use of an equivalent martingale measure. Furthermore, it turns out that we can dispense the assumption of a constant leverage ratio. This assumption is obviously very restrictive, since in many applications as for example LBO's the leverage ratio usually drops down very fast (see for example (Newbould et al. 1992)). In discrete time we have to make a further assumption regarding the probability distribution of cash flows. The cash flows of the firm (after being adjusted by a time varying growth rate) have to form a martingale under the subjective probability measure. This assumption corresponds to the stochastic differential equation used in the continuous time

¹(Taggart 1991, p. 12) has a continuous time approach. But his approach is heuristic and does not contain rigorous proofs. Also the later paper by (Harris and Pringle 1985) is not based on a rational argument but on “pedagogic advantages” (p.241).

theory: there the conditional expectation of the increment of values of the firm is proportional to the current firm value. Using this assumption formulas similar to (Miles and Ezzell 1980) can be verified.

We do not discuss the issue whether the exogenous leverage ratio is optimal. The tax system we use in our analysis implies that the higher the leverage ratio the higher will be the value of the firm's cash flows. Therefore, it is suboptimal to choose a financing policy without complete debt financing. The question what determines an optimal policy is not our concern.

To present our counterexample we consider a binomial model with two periods. Cash flows after tax of the unlevered firm are as shown in figure 1. The (subjective) probabilities are chosen such that up- and down-movements occur with probability 0.5.

Place figure 1 here.

We furthermore assume that the cost of capital are constant at $r^U = 10\%$ and let the riskless rate be $r_f = 5\%$.² Since we can evaluate the expectation of the cash flows we get the following values of the unlevered firm

$$V_0^U = \$100, \quad V_1^U(u) = \$50, \quad V_1^U(d) = \$50.$$

We will use a tax rate of 34%. We furthermore assume that the levered firm will maintain a leverage ratio of 42.08369%. From the Miles-Ezzell-formula (see (Miles and Ezzell 1980, p. 726)) we get the weighted average cost of capital as

$$\text{WACC} = \left(1 - \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l\right) (1 + r^U) - 1 = 9.2505095\%$$

If we discount the expected cash flows using this WACC we have the following value of the levered firm

$$V_0^L = \frac{E[\tilde{\text{CF}}_1^U]}{1 + \text{WACC}} + \frac{E[\tilde{\text{CF}}_2^U]}{(1 + \text{WACC})^2} = \$101. \quad (1)$$

Assume now that shares of the levered and the unlevered firm trade at a market. A riskless asset is traded at a value of one. We consider the following strategy of the

²These two values correspond to the following risk neutral probabilities in our model

$$p_u^Q = 0.45833, \quad p_d^Q = 1 - p_u^Q, \quad p_{u|u}^Q = 0.47727, \quad p_{d|u}^Q = 1 - p_{u|u}^Q, \quad p_{u|d}^Q = 0.47727, \quad p_{d|d}^Q = 1 - p_{u|d}^Q.$$

investor. At time $t = 0$ she holds one share of the levered firm long and one share of the unlevered firm short. She furthermore sells for the amount of \$1 riskless assets at $t = 0$. At time $t = 1$ she still holds the risky assets and after paying retirement and interest from the bond she sells riskless assets for \$0.33 again. The following table summarizes her strategy.

Place table 1 here.

We now evaluate the payments of the strategy. At time $t = 0$ no payment has to be made. At time $t = 1$ the difference of the cash flows of the unlevered and the levered firm are given by the tax advantages from debt

$$\tilde{CF}_1^L - \tilde{CF}_1^U = \tau r_f l V_0^L = 0.722576 > 1.05 - 0.33$$

and hence the net cash flow of her strategy is greater than zero. At $t = 1$ only one period is left. The value of the levered firm is therefore determined by the relation

$$V_1^L(u, d) = V_1^U(u, d) + \frac{\tau r_f l V_1^L(u, d)}{1 + r_f} \quad \Rightarrow \quad V_1^L(u, d) = 50.34301.$$

Hence, at $t = 2$ regardless of the state the investor has tax advantages as high as

$$\tilde{CF}_2^L - \tilde{CF}_2^U \geq \tau r_f l V_1^L(u, d) = 0.360165$$

and the net cash flow is higher than zero. To summarize: the investor receives money at $t = 1, 2$ without facing the risk of earlier payments. This is an arbitrage opportunity.

The paper is organized as follows. We start with the WACC theory in continuous time. The next chapter develops the model in discrete time. We then establish results similar to (Miles and Ezzell 1980).

2 The WACC theory in continuous time

The future $t > 0$ is uncertain, time horizon is the interval $[0, T]$. With time t information evolves about the true state of the world. This can be formalized using a probability space and a filtration \mathcal{F}_t (for details see (Duffie 1988, p. 130)). An investor values a firm with lifetime T . There is a firm income tax τ , interest payments reduce taxes.

First we consider the value of the levered firm V_t^L . The firm has a deterministic payout-ratio δ_t , where the after-tax cash flow at time t is given by $\delta_t V_t^L$.

Assumption 1 (probability distribution of cash flows) Under the subjective probability measure the firm has drift r_t^L and volatility σ_t^L (all variables are subject to several conditions that ensure the equation has indeed a solution, for details see (Duffie 1988, p. 228))

$$dV_t^L = (r_t^L - \delta_t)V_t^L dt + \sigma_t^L V_t^L dW_t, \quad (2)$$

where W_t is the standard Brownian Motion.

The firm is financed by the amount S_t of stocks (equity) and the amount B_t of bonds (debt). Interest payments from debt are certain, the instantaneous riskless rate is given by r_t and may vary with time t . The amount of debt is subject to the financing policy of the firm. Therefore, this amount might be a random variable itself. We now make the following assumption concerning the debt schedule of the firm.

Assumption 2 (debt schedule) The leverage ratio of the firm $l_t = \frac{B_t}{V_t^L}$ is deterministic and differentiable.

This implies, that today ($t = 0$) the investor knows what the leverage ratio at time $t > 0$ will be. It is not required that the leverage ratio will be the same at each date $t > 0$. The investor does not need to know the absolute amount of equity and debt at time $t > 0$.

At time $t = s$ the levered firm has debt $l_s V_s^L$ and therefore a tax relief $\tau r_s l_s V_s^L$ compared to the unlevered firm. This tax relief implies a difference of the levered firm value V_t^L to the unlevered firm value V_t^U which will be denoted as tax shield T_t . We can prove the following result.

Proposition 1 (WACC formula in continuous time) The value of the tax shield is given by

$$T_t = V_t^L \int_t^T \tau r_s l_s e^{\int_t^s -\delta_u du} ds =: V_t^L \cdot L_t.$$

Furthermore, the volatility of the leverage and unleveraged firm coincide $\sigma_t^L = \sigma_t^U$ and the drift of the leveraged and the unleveraged firm satisfy the following relation

$$r_t^L = r_t^U + \frac{\dot{L}_t}{1 - L_t}. \quad (3)$$

Proof. If the market is free of arbitrage there is a risk neutral probability measure Q such that the discounted value of the firm is a martingale. Q is given by

$$\frac{dW^Q}{dW} = \exp \left(- \int_0^T \frac{r_t^L - r_t}{\sigma_t^L} dW_t - \int_0^T \frac{1}{2} \left(\frac{r_t^L - r_t}{\sigma_t^L} \right)^2 dt \right).$$

If we change the measure using Girsanov's formula we get

$$dV_t^L + \delta_t V_t^L dt = r_t V_t^L dt + \sigma_t^L V_t^L dW_t^Q. \quad (4)$$

Now let us consider the tax shield. We can evaluate this tax shield using the standard technique by calculating the deflated expectation under the risk neutral probability measure

$$T_t = \mathbb{E}^Q \left[\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} \tau r_s l_s V_s^L ds \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Since the leverage ratio is deterministic everything except V_s is nonstochastic. Using Fubini the value of the tax shield simplifies to

$$T_t = \int_t^T \tau r_s l_s e^{-\int_t^s r_u du} \mathbb{E}^Q [V_s^L \mid \mathcal{F}_t] ds.$$

V_s^L is a solution of the stochastic differential equation (4). Hence, its expectation can be evaluated and we get

$$\begin{aligned} T_t &= \int_t^T \tau r_s l_s e^{-\int_t^s r_u du} V_t^L e^{\int_t^s (r_u - \delta_u) du} ds \\ &= V_t^L \int_t^T \tau r_s l_s e^{\int_t^s -\delta_u du} ds. \end{aligned}$$

This proves the first part of the proposition.

The value of the unlevered firm is the sum of the tax shield and the value of the levered firm

$$V_t^L = V_t^U + T_t.$$

Collecting terms we get

$$V_t^U = V_t^L \cdot (1 - L_t).$$

If we apply Itô's lemma we get using (2)

$$\begin{aligned} dV_t^U &= \sigma_t^L V_t^U dW_t + \left(r_t^L V_t^U - \delta_t V_t^U - \dot{L}_t V_t^L \right) dt \\ &= \sigma_t^L V_t^U dW_t + \left(r_t^L - \frac{\dot{L}_t}{1 - L_t} - \delta_t \right) V_t^U dt \end{aligned}$$

and this was to be shown. ■

The value of the tax shield is determined by the value of the levered firm and a factor L_t that depends on the leverage ratio, the riskless rate of return and the payout ratio. If volatility, payout ratio and leverage ratio are constant, under an infinite time horizon L_t simplifies to

$$L_t = \frac{\tau r}{\delta} l.$$

3 The WACC theory in discrete time

To extend our theory to a discrete time setup we make the following assumptions. There are T periods of time $t = 0, 1, \dots, T$ and at $t = T$ we assume transversality (value of the levered and unlevered firm are zero). We assume that the cost of capital are constant, hence the value at time t satisfies the equation

$$\tilde{V}_t^u = \frac{E[\tilde{V}_{t+1}^U + \tilde{C}F_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{1 + r^U}, \quad (5)$$

where r^U are the cost of capital of the unlevered firm (our result can easily be generalized to time varying cost of capital). Our assumption of constant cost of capital is made for simplicity, the proofs reveal that we can easily suspend it. If the market is free of arbitrage there is an equivalent martingale measure Q such that the value of the unlevered firm V_t^U satisfies the following recursive equation ($t \leq T - 1$)

$$\tilde{V}_t^U = \frac{E_Q[\tilde{V}_{t+1}^U + \tilde{C}F_{t+1}]}{1 + r_f}. \quad (6)$$

The value of a levered cash flow stream at time t equals the market value of the unlevered cash flow stream plus the tax shield T_t at time t :

$$\tilde{V}_t^L = \tilde{V}_t^U + T_t. \quad (7)$$

Again, the amount of debt and the tax shield are random variables.

At time t the amount of debt B_t will induce a riskless tax shield at time $t + 1$, consequently we have

$$T_t = \frac{E_Q[T_{t+1}] + \tau r_f B_t}{1 + r_f}. \quad (8)$$

To derive our discrete time analogy to proposition 1 we have to make a further assumption regarding the probability distribution of cash flows. This will enable us to prove a formula that in the case of constant leverage ratios was already provided by (Miles and Ezzell 1980) and (Miles and Ezzell 1985). In continuous time theory the assumption of a Brownian motion implies that the conditional expectation of the increment of values of the firm is proportional to the current firm value. In discrete time we use this condition for the cash flows instead of the firm values.

Assumption 3 (probability distribution of cash flows) *The cash flows satisfy*

$$E[\tilde{C}F_{t+1} - \tilde{C}F_t | \mathcal{F}_t] = g_t \cdot \tilde{C}F_t \quad (9)$$

where $g_t > 0$ is deterministic.

Notice that it would not make sense to assume growing cash flows $\tilde{C}F_t = (1 + g_t) \cdot \tilde{C}F_1$: since cash flows at time t are adapted the random variable $\tilde{C}F_t$ had to be \mathcal{F}_1 -measurable. But this is to say that there would not have been any uncertainty about the future dividends today.

Our assumption is for example satisfied if the cash flows are a product of independent random variables. To this end let the cash flows be

$$\tilde{C}F_t = (1 + g_1 + Y_1) \cdots (1 + g_t + Y_t)$$

where the Y_t are independent with expectation zero and \mathcal{F}_t be the filtration generated by Y_1, \dots, Y_t . It is straightforward to show that these cash flows satisfy equation (9). Again we assume that the leverage ratio is deterministic.

Assumption 4 (debt schedule) *The leverage ratio $l_t = \frac{B_t}{V_t^L}$ ($t \geq 0$) is deterministic.*

We are now able to prove the following result which is the discrete time analogy to proposition 1.

Proposition 2 (WACC formula in discrete time) *If the leverage ratios satisfy assumption 4 and the cash flows satisfy assumption 3 the value of the levered company is given by*

$$V_0^L = \sum_{t=1}^T \frac{E[\tilde{C}F_1]}{\prod_{k=1}^t \left\{ (1 - \frac{\tau r_f}{1+r_f} l_{k-1}) (1 + r^U) \right\}}. \quad (10)$$

If the leverage ratio is constant this is the (Miles and Ezzell 1980) formula. As in their paper the denominator can easily be shown as the weighted average of the cost of capital of debt and equity. If furthermore lifetime is infinite we arrive at the (Miles and Ezzell 1985) result.

Proof. We start with some preliminary results. From (9) and (5) we get

$$\tilde{V}_t^U = \sum_{i=t+1}^T \frac{E[\tilde{C}F_i | \mathcal{F}_t]}{(1 + r^U)^{i-t}} = \sum_{i=t+1}^T \frac{\prod_{k=t}^{i-1} (1 + g_k)}{(1 + r^U)^{i-t}} \tilde{C}F_t =: A_t \cdot \tilde{C}F_t.$$

For A_{t-1} the following holds

$$\begin{aligned} A_{t-1} &= \sum_{i=t}^T \frac{\prod_{k=t-1}^{i-1} (1 + g_k)}{(1 + r^U)^{i-(t-1)}} \\ &= \frac{1 + g_{t-1}}{1 + r^U} + \frac{1 + g_{t-1}}{1 + r^U} \sum_{i=t+1}^T \frac{\prod_{k=t}^{i-1} (1 + g_k)}{(1 + r^U)^{i-t}} \\ &= \frac{1 + g_{t-1}}{1 + r^U} (1 + A_t). \end{aligned}$$

This and (6) imply

$$\begin{aligned}
& \frac{E_Q[A_t \cdot \tilde{C}F_t + \tilde{C}F_t | \mathcal{F}_{t-1}]}{1 + r_f} = \tilde{V}_{t-1}^U = A_{t-1} \cdot \tilde{C}F_{t-1} \\
\Rightarrow & \frac{1 + A_t}{1 + r_f} E_Q[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_{t-1}] = A_{t-1} \tilde{C}F_{t-1} \\
\Rightarrow & \frac{E_Q[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_{t-1}]}{1 + r_f} = \frac{1 + g_{t-1}}{1 + r^U} \tilde{C}F_{t-1}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Taking the expectation $E_Q[\cdot | \mathcal{F}_{t-2}]$ and applying the law of iterated expectation gives us

$$\frac{E_Q[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_{t-2}]}{1 + r_f} = \frac{1 + g_{t-1}}{1 + r^U} E_Q[\tilde{C}F_{t-1} | \mathcal{F}_{t-2}]$$

Applying the above result (11) for $t - 1$ we get using (9)

$$\frac{E_Q[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_{t-2}]}{1 + r_f} = \tilde{C}F_{t-2} (1 + r_f) \frac{(1 + g_{t-1}) \cdot (1 + g_{t-2})}{(1 + r^U)^2} = E[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_{t-2}] \frac{1 + r_f}{(1 + r^U)^2}.$$

Continuing our calculations we arrive at

$$\frac{E_Q[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_k]}{(1 + r_f)^{t-k}} = \frac{E[\tilde{C}F_t | \mathcal{F}_k]}{(1 + r^U)^{t-k}} \tag{12}$$

for any $t > k \geq 1$.

At time $t = T - 1$ the values of the levered and the unlevered firm satisfy

$$\left(1 - \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l_{T-1}\right) \tilde{V}_{T-1}^L = \tilde{V}_{T-1}^U,$$

Using (6) the firm's value at $T - 1$ can be written:

$$\tilde{V}_{T-1}^L = \frac{E_Q[\tilde{C}F_T | \mathcal{F}_{T-1}]}{\left(1 - \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l_{T-1}\right)(1 + r_f)}. \tag{13}$$

From (8) we get the tax shield using the last equation (remember $T_T = 0$)

$$\begin{aligned}
T_{T-1} &= \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l_{T-1} \tilde{V}_{T-1}^L \\
&= \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l_{T-1} \frac{E_Q[\tilde{C}F_T | \mathcal{F}_{T-1}]}{\left(1 - \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l_{T-1}\right)(1 + r_f)}.
\end{aligned}$$

(8) implies now (we also need the law of iterated expectation, see for example (Williams 1991, p. 88))

$$T_{T-2} = \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l_{T-1} \frac{E_Q[\tilde{C}F_T | \mathcal{F}_{T-2}]}{\left(1 - \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l_{T-1}\right)(1 + r_f)^2} + \frac{\tau r_f}{1 + r_f} l_{T-2} \tilde{V}_{T-2}^L. \tag{14}$$

With (7) and some laborious we get an equation of the firm's levered cash flow stream at time $T - 2$:

$$\tilde{V}_{T-2}^L = \frac{E_Q[\tilde{CF}_T | \mathcal{F}_{T-2}]}{(1 - \frac{\tau r_f}{1+r_f} l_{T-2})(1 - \frac{\tau r_f}{1+r_f} l_{T-1})(1 + r_f)^2} + \frac{E_Q[\tilde{CF}_{T-1} | \mathcal{F}_{T-2}]}{(1 - \frac{\tau r_f}{1+r_f} l_{T-2})(1 + r_f)}. \quad (15)$$

By induction we get the following value of the levered cash flow stream at time 1 analogously to (13) and (15):

$$V_0^L = \sum_{t=1}^T \frac{E_Q[\tilde{CF}_t | \mathcal{F}_0]}{\prod_{k=1}^t \left\{ (1 - \frac{\tau r_f}{1+r_f} l_{k-1})(1 + r_f) \right\}}.$$

Using (12) this is

$$V_0^L = \sum_{t=1}^T \frac{E[\tilde{CF}_t | \mathcal{F}_0]}{\prod_{k=1}^t \left\{ (1 - \frac{\tau r_f}{1+r_f} l_{k-1})(1 + r^U) \right\}}$$

Since the conditional expectation with respect to \mathcal{F}_0 is just the expectation under the subjective probability this is the desired result. ■

4 Conclusion

In this paper we have shown that using the WACC approach of (Miles and Ezzell 1980) can yield an arbitrage strategy. The reason for the existence of the arbitrage strategy is that the formula may give the wrong value of a levered firm even if the leverage ratio is held constant.

Nevertheless, if in discrete time the increment of the cash flows is proportional to the current cash flow we have shown that we can surmount the problems concerning the WACC approach. This condition on the cash flows can be interpreted as a discrete time analog of a Brownian motion. We were even able to generalize the results to the case where the leverage ratio of the firm is not constant but only deterministic. This WACC approach could also be provided in continuous time.

Acknowledgments

This is a corrected and completely revised version of a paper called "WACC approach and Nonconstant Leverage Ratio". I thank the Deutsche Forschungsgemeinschaft for financial support and Simon Benninga, Edwin O. Fischer, Sven Husmann, Jörg Laitenberger, Mike Schwake, and Nicholas Wonder for helpful remarks.

References

- Brealey, R. and Myers, S. (1996). *Principles of Corporate Finance*, 5. edn, Wiley & Sons., New York.
- Clubb, C. and Doran, P. (1995). Capital budgeting, debt management and the apv criterion, *Journal of Business Finance and Accounting* **22** (5): 681-694.
- Duffie, D. (1988). *Security Markets*, Academic Press, Inc., San Diego.
- Grinblatt, M. and Titman, S. (1998). *Financial Markets and Corporate Strategy*, McGraw-Hill Companies, Chicago.
- Harris, R. and Pringle, J. (1985). Risk-adjusted discount rates - extension from the average-risk case, *Journal of Financial Research* **8**: 237-244.
- Miles, J. and Ezzell, J. (1980). The weighted average cost of capital, perfect capital markets, and project life: A clarification, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **15**: 719-730.
- Miles, J. and Ezzell, J. (1985). Reformulating tax shield valuation: A note, *Journal of Finance* **40**: 1485-1492.
- Modigliani, F. and Miller, M. (1963). Corporate income taxes and cost of capital: A correction, *American Economic Review* **53**: 433-443.
- Myers, S. (1974). Interactions of corporate financing and investment decisions - implications for capital budgeting, *Journal of Finance* **29**: 1-25.
- Newbould, G., Chatfield, R. and Anderson, R. (1992). Leveraged buyouts and tax incentives, *Financial Management* **21** (1): 50-57.
- Ross, S., Westerfield, R. and Jaffe, J. (1996). *Corporate Finance*, 4th edn, McGraw-Hill, Inc., Chicago.
- Taggart, R. (1991). Consistent valuation and cost of capital expressions with corporate and personal taxes, *Financial Management* pp. 8-20.
- Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge.

cash flows (in \$)	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
from levered firm	-101	$+\tilde{CF}_1^L$	$+\tilde{CF}_2^L$
from unlevered firm	100	$-\tilde{CF}_1^U$	$-\tilde{CF}_2^U$
from selling riskless in $t = 0$	1	-1.05	
from selling riskless in $t = 1$		0.33	-0.3465
sum	0	>0	>0

Table 1: The arbitrage strategy of the investor using the Miles-Ezzell-formula

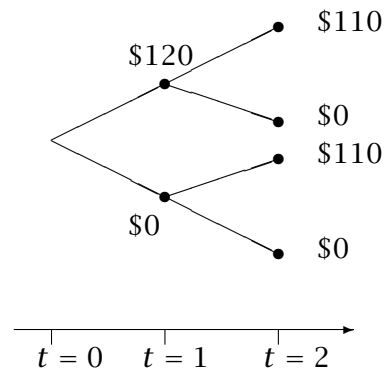


Figure 1: Cash flows of the unlevered firm (after tax) \tilde{CF}^U creating an arbitrage strategy